Lezione del 28.02.

Questa lezione si riferisce a: Cap.1 Introduzione ai sistemi lineari, Par.1.3 Matrici e sistemi lineari. Gli argomenti sono gli stessi, ma sono diversi: l'ordine, gli esempi, e per alcuni aspetti le definzioni e proposizioni. Per questa ragione si riporta di seguito in modo sintetico l'intera lezione; per i dettagli si rimanda ciascuno ai propri appunti. Sintesi degli argomenti: alcune prime questioni sui sistemi lineari; esempi nei quali è facile rispondere; definzione di matrice a scala e di sistema a scala; proposizione sui sistemi a scala.

Problemi per un dato sistema lineare $A\underline{x} = \underline{b}$: (1) ha soluzioni? (2) se si, "quante"? (3) come si possono determinare? Per un certo tipo di sistemi, è facile rispondere. Alcuni esempi sono riportati di seguito.

Esempio 1.

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ \quad 4y + 5z = 2 \\ \qquad 6z = 3 \end{cases} \qquad (\text{ incognite } \ x, y, z)$$

Ha una ed una sola soluzione, che si ottiene nel modo seguente: dalla terza equazione si ricava il valore della z; nella seconda equazione si sostituisce il valore della z e da essa si ricava il valore della y; nella prima equazione si sostituiscono i valori della y e della z e da essa si ricava il valore della x.

Esempio 2.

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ \quad 4y + 5z = 2 \end{cases} \qquad (\text{ incognite } \ x, y, z)$$

Ha infinite soluzioni, che si ottengono risolvendo rispetto ad x e y in funzione della z e lasciando z libera; si ha la seguente descrizione della soluzione generale:

$$(-\frac{1}{2}z, -\frac{5}{4}z + \frac{1}{2}, z) \qquad (z \in \mathbb{R}).$$

(si verifichi che tutte queste terne sono soluzioni).

Esempio 3.

$$x + 2y + 3z = 1 \qquad (\text{ incognite } \ x, y, z)$$

Ha infinite soluzioni, che si ottengono risolvendo rispetto ad x in funzione della y e della z e lasciando y e z libere; si dice che si hanno "infinito al quadrato" ∞^2 soluzioni; si ha la seguente descrizione della soluzione generale: $(-2y - 3z + 1, y, z)$ con $y, z \in \mathbb{R}$.

Esempio 4.

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ \quad 4y + 5z = 2 \\ \qquad 6z = 3 \\ \qquad 0 = 4 \end{cases} \qquad (\text{ incognite } \ x, y, z)$$

Non ha soluzioni.

Esempio 5.

$$\begin{cases} x + 2y + 3z + 4u + 5v = 1 \\ \qquad\qquad 6z + 7u + 8v = 2 \end{cases} \qquad (\text{ incognite } \ x, y, z, u, v)$$

Ha infinite soluzioni, che si ottengono risolvendo rispetto ad x e z in funzione delle y, u, v e e lasciando y, u, v libere; si dice che si hanno ∞^3 soluzioni.

Terminologia. Per ennuple (analogamente per righe o colonne). Si dice ennupla "nulla" la ennupla $\underline{0} = (0, 0, ..., 0)$ che ha tutte le componenti nulle. Si dice "pivot" di una ennupla non nulla il suo primo elemento diverso da 0.

Definizione. Una matrice A si dice "a scala" (per righe) se per ogni riga R di A, indicata con R' la riga successiva, si ha: (1) se R è nulla, allora anche R' è nulla; (2) se R non è nulla allora R' è nulla oppure il pivot di R' sta strettamente a destra del pivot di R. Il numero delle righe non nulle di A si dice "rango per righe" di A e si indica con $rr(A)$.

Rappresentazione grezza della generica matrice a scala di tipo 4×6 avente pivot nella seconda, terza, quinta colonna, e dunque avente rango 3; il simbolo $\spadesuit$ indica un numero diverso da 0 e il simbolo $*$ un numero qualsiasi (diverse occorrenze di uno stesso simbolo possono indicare numeri diversi).

$$\begin{pmatrix} 0 & \spadesuit & * & * & * & * \\ 0 & 0 & \spadesuit & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \spadesuit & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Osservazione: se una matrice A ha tipo $m \times n$, allora $rr(A)$ (che è uguale al numero di righe non nulle di A ed è uguale al numero di pivot di A) è minore-uguale ad m (ovvio) e ad n (in quanto i pivot stanno in colonne distinte). In breve: $rr(A) \leq \min(m, n)$.

Definizione. Un sistema $A\underline{x} = \underline{b}$ si dice "a scala" se la sua matrice completa $(A|\underline{b})$ è a scala.

Rappresentazione grezza della sistema a scala che corrispondea alla matrice a scala di sopra.

$$\begin{cases} \spadesuit x_2 + *x_3 + *x_4 + *x_5 = * \\ \qquad \spadesuit x_3 + *x_4 + *x_5 = * \\ \qquad\qquad\qquad \spadesuit x_5 = * \\ \qquad\qquad\qquad\quad 0 = 0 \end{cases} \qquad (\text{incognite } x_1, x_2, \ldots, x_5).$$

Osservazioni.

(1) Se $(A|\underline{b})$ è a scala, allora anche A è a scala (lo si motivi);

(2) $rr(A)$ è minore-uguale a $rr(A|b)$ (ciascuna riga non nulla di A è parte di una riga non nulla di $(A|\underline{b})$)

(3) $rr(A|\underline{b})$ e minore-uguale a $rr(A) + 1$ (ciascuna riga non nulla di $(A|\underline{b})$ o contiene una riga non nulla di A oppure ha il pivot nell'ultima colonna, e in una matrice a scala ci può essere al più una tale riga).

Proposizione. Per ciascun sistema lineare $A\underline{x} = \underline{b}$ in n incognite si ha:

(1) se $rr(A) = rr(A|b) = n$, allora il sistema ha una ed una sola soluzione;

(2) se $rr(A) = rr(A|b) = p < n$, allora il sistema ha ∞^{n-p} soluzioni;

(3) se $rr(A) < rr(A|b)$, allora il sistema non ha soluzioni.

Dimostrazione.

(1) Sia $rr(A) = rr(A|\underline{b}) = n$. Allora: i pivot di A sono esattamente gli elementi sulla diagonale (discendente) di A; le righe dalla $(n+1)$-ma in poi di $(A|b)$ sono nulle. Per il sistema ciò significa che: per ciascun indice i fra 1 ed n, nella $i-$ma equazione la prima incognita che compare effettivamente è la i-ma incognita; ciascuna (eventuale) equazione dalla $(n+1)$-ma in poi è 0=0. Allora il sistema ha una ed una sola soluzione: i valori delle incognite si ottengono per risoluzione e sostituzione all'indietro a partire dalla n-ma equazione.

(2) Sia $rr(A) = rr(A|\underline{b}) = p < n$. Allora, eventualmente riordinando le colonne di A possiamo supporre che i pivot di A siano esattamente i primi p elementi sulla diagonale (discendente) di A; le righe dalla $(p+1)$-ma in poi di $(A|\underline{b})$ sono nulle. Per il sistema ciò significa che: per ciascun indice i fra 1 e p, nella i-ma equazione la prima incognita che compare effettivamente è la i-ma incognita; ciascuna equazione dalla $(p+1)$-ma in poi è 0=0. Allora il sistema ha infinite soluzioni, che si ottengono ricavando le prime p incognite in funzione delle rimanenti $n-p$ incognite e lasciando queste libere. Dunque il sistema ha ∞^{n-p} soluzioni.

(3) In questo caso si ha $rr(A) = p$ e $rr(A|\underline{b}) = p+1$. Allora la $(p+1)$-ma riga di $(A|\underline{b})$ ha i primi n elementi nulli e l'ultimo elemento non nullo. Per il sistema ciò significa che la $(p+1)$-ma equazione è $0 = \spadesuit$ con $\spadesuit \neq 0$. Allora il sistema non ha soluzioni.