Lezione del 06.03.

Questa lezione si riferisce al Cap.1 “Introduzione ai sistemi lineari” Par. 1.4 “Algoritmo di Gauss”. Le struttura del discorso su questi argomenti nella lezione e nel testo è la stessa. Per quanto riguarda le singole parti del discorso, le due trattazioni si complementano l'una con l'altra. Di seguito si riportano sinteticamente la teoria e gli esercizi svolti a lezione. Sono stati volutamente tralasciati quasi tutti i risultati generali presentati al termine della lezione (verranno ripresi più avanti).

Un metodo per la risoluzione dei sistemi di due equazioni in due incognite

Consideriamo il sistema

$$\begin{array}{c} (1) \\ (2) \end{array} \left\{ \begin{array}{r} x + 3y = 5 \\ 2x + 4y = 6 \end{array} \right.$$

Sottraendo ai membri della (2) il prodotto di 2 per i rispettivi membri della (1), si ottiene un sistema che ha le stesse soluzioni, ed è a scala, specificamente

$$\left\{ \begin{array}{rl} x + 3y = & 5 \\ -2y = & -4 \end{array} \right.$$

Dunque il sistema ha una ed una sola soluzione, (-1,2).

Consideriamo il generico sistema di due equazioni in due incognite x, y

$$\begin{array}{c} (1) \\ (2) \end{array} \left\{ \begin{array}{l} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{array} \right. \qquad \left(\begin{array}{cc|c} a & b & c \\ d & e & f \end{array} \right)$$

Sommando ai membri della (2) il prodotto di un dato numero $\lambda \in \mathbb{R}$ per i rispettivi membri della (1), si ottiene un sistema che ha le stesse soluzioni

$$\begin{array}{c} (1) \\ (2') \end{array} \left\{ \begin{array}{ll} ax + by & = c \\ dx + ey + \lambda(ax + by) & = f + \lambda c \end{array} \right.$$

(è chiaro che ogni soluzione comune di (1) e (2) è anche una soluzione di (1) e (2'); viceversa, ogni soluzione comune di (1) e (2') è anche una soluzione di (1) e (2), in quanto in quanto la (2) si puo ottenere semplificando la (2') mediante la (1)). Questo sistema si può riscrivere come

$$\begin{array}{c} (1) \\ (2') \end{array} \left\{ \begin{array}{ll} ax + by & = c \\ (d + \lambda a)x + (e + \lambda b)y & = f + \lambda c \end{array} \right. \qquad \left(\begin{array}{cc|c} a & b & c \\ d + \lambda a & e + \lambda b & f + \lambda c \end{array} \right)$$

- Se $a \neq 0$, prendendo $\lambda = -d/a$ si ha un sistema del tipo

$$\left\{ \begin{array}{r} ax + by = c \\ *y = * \end{array} \right.$$

-Se $a = 0$ e $d \neq 0$ allora si possono scambiare le due equazioni e procedere allo stesso modo ...

In ogni caso, con le operazioni “sommare alla seconda equazione un multiplo reale della prima” e “scambiare le due equazioni”, è sempre possibile trasformare il sistema dato in un sistema a scala.

Operazioni elementari sulle righe e sistemi equivalenti.

Definizione. Due sistemi nelle stesse incognite si dicono equivalenti se hanno lo stesso insieme di soluzioni.

Operazioni sulle $n-$uple (analoghe operazioni si hanno sulle righe o sulle colonne). (1) Si definisce la somma di due $n-$uple $\underline{a}$ e $\underline{b}$, e si indica con $\underline{a}+\underline{b}$, la $n-$pla che ha in ciascuna componente la somma delle rispettive componenti di $\underline{a}$ e $\underline{b}$; in simboli, per ogni $\underline{a}=(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ e $\underline{b}=(b_1,b_2,\ldots,b_n)$ si pone

$$\underline{a}+\underline{b}=(a_1+b_1,a_2+b_2,\ldots,a_n+b_n).$$

(2) Si definisce il prodotto di un numero reale λ per una $n-$pla $\underline{a}$, e si indica con $\lambda\underline{a}$, la $n-$pla che ha in ciascuna componente il prodotto di λ per la rispettiva componente di $\underline{a}$; in simboli, per ogni λ ed ogni $\underline{a}=(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ si pone

$$\lambda\underline{a}=(\lambda a_1,\lambda a_2,\ldots,\lambda a_n).$$

Definizione. Le operazioni elementari sulle righe $R_1,R_2,\ldots,R_m$ di una matrice sono: (1) sommare alla riga $i-$ma il prodotto di λ per la riga $j-$ma ($\lambda\in\mathbb{R}$, $i\neq j$); questa operazione si indica con $R_i\to R_i+\lambda R_j$; (2) scambiare la riga $i-$ma con la riga $j-$ma; questa operazione si indica con $R_i\leftrightarrow R_j$; (3) moltiplicare la riga $i-$ma per un numero reale $\lambda\neq 0$; questa operazione si indica con $R_i\to\lambda R_i$. L'interesse di queste operazioni e dato dalla seguente

Proposizione 1. Sia $(A'|\underline{b}')$ una matrice ottenuta da una matrice $(A|\underline{b})$ mediante una o più operazioni elementari sulle righe. Allora il sistema $A'\underline{x}=\underline{b}'$ è equivalente al sistema $A\underline{x}=\underline{b}$.

Algoritmo di Gauss per le matrici e risoluzione dei sistemi.

Proposizione 2. Ogni matrice si può trasformare, mediante operazioni elementari sulle righe, in una matrice a scala. Questa trasformazione si può effettuare tramite l'algoritmo di Gauss descritto di seguito.

Algoritmo di Gauss [1] Input: una matrice A; Output: una matrice a scala. [Passo 0] Se A è la matrice nulla, allora A è a scala e l'algoritmo termina; altrimenti si procede come segue. [Passo 1] Sia C' la prima colonna non nulla di A. Se il primo elemento di C' è diverso da zero, allora si procede col sottopasso 1.1; altrimenti, si scambia la prima riga di A con un'opportuna altra riga di A in modo da rendere il primo elemento di C' diverso da zero e si procede col sottopasso 1.1. [Sottopasso 1.1] Si sommano alla seconda, terza, ..., ultima riga di A opportuni multipli della prima riga di A in modo da annullare il secondo, terzo, ..., ultimo elemento di C'. si ottiene una matrice della forma

$$\begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & \spadesuit & * & \ldots & * \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & * & \ldots & * \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & * & \ldots & * \end{pmatrix}, \qquad \spadesuit\neq 0.$$

Si lascia invariata la prima riga e si applicano i passi 0 e 1 alla matrice costituita dalle righe dalla seconda in poi.

[1] In realtà quello presentato non è un vero algoritmo in quanto ci sono dei passi non completamente determinati.

Dalle proposizioni 1 e 2 segue direttamente la

Proposizione 3. Ogni sistema lineare è equivalente ad un sistema a scala.

Un metodo per la risoluzione di un sistema dato da: (1) trasformare la matrice completa del sistema mediante l'algoritmo di Gauss in una matrice a scala; (2) risolvere il sistema a scala associato a questa matrice:

$$\text{sistema} \to \text{matrice} \to \text{matrice a scala} \to \text{sistema a scala}$$

Esempi

Esempio 1. È dato il sistema nelle incognite x, y, z

$$\begin{cases} x + y + z &= 1 \\ 4x + 2y + z &= 0 \\ 9x + 3y + z &= 0 \end{cases}.$$

Applichiamo l'algoritmo di Gauss alla matrice completa del sistema

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 0 \\ 9 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ R_2 - 4R_1 \\ R_3 - 9R_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & -6 & -8 & -9 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ R_3 - 3R_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right).$$

Il sistema corrispondente è

$$\begin{cases} x + y + z = & 1 \\ -2y - 3z = & -2 \\ z = & -3 \end{cases};$$

ha una ed una sola soluzione.

Esempio 2. È dato il sistema nelle incognite x, y, z

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = & 1 \\ 2x + 3y + 4z = & 1 \\ 3x + 4y + 5z = & 0 \end{cases}$$

Applichiamo l'algoritmo di Gauss alla matrice completa del sistema

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ R_2 - 2R_1 \\ R_3 - 3R_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & -4 & -3 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ R_3 - 2R_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

Il sistema corrispondente è

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = & 1 \\ -y - 2z = & -1 \\ 0 = & -1 \end{cases};$$

non ha alcuna soluzione.

Esempio 3. È dato il sistema nelle incognite x, y, z, u che ha la matrice completa

$$(A|\underline{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Applicando l'algoritmo di Gauss si ottiene la matrice

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = (A'|\underline{b}')$$

Si ha $rr(A') = rr(A'|\underline{b}') = 2$ quindi il sistema dato ha $\infty^{4-2} = \infty^2$ soluzioni, che si ottengono da questo sistema ricavando x, y in funzione di z, u, lasciando z, u libere.

Esempio 4. È dato il sistema nelle incognite x, y, dipendente dal parametro $k \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 3x + 6y = k \end{cases}$$

Sottraendo dalla seconda equazione la prima moltiplicata per 3 si ottiene il sistema

$$\begin{cases} x + 2y = & 3 \\ \quad\quad 0 = & k - 9 \end{cases}$$

Per $k \neq 9$ il sistema non ha alcuna soluzione; per $k = 9$ il sistema è equivalente all'unica equazione

$$x + 2y = 3$$

ed ha infinite soluzioni.

Esempio 5. È dato il sistema nelle incognite x, y, dipendente dal parametro $k \in \mathbb{R}$, che ha la seguente matrice completa

$$\left(\begin{array}{cc|c} k & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \end{array}\right)$$

Applichiamo le operazioni elementari

$$\begin{array}{c} R_2 \\ R_1 \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 4 & 6 \\ k & 2 & 5 \end{array}\right) \quad R_2 - \tfrac{k}{3}R_1 \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 4 & 6 \\ 0 & \frac{6-4k}{3} & \frac{15-6k}{3} \end{array}\right)$$

Per $k \neq 2/3$ il sistema ha una ed una sola soluzione; per $k = 2/3$ il sistema ha matrice completa

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & \frac{11}{3} \end{array}\right)$$

dunque non ha alcuna soluzione.

Fatto generale

Proposizione. Ciascun sistema lineare in n incognite è equivalente ad un sistema di al più $n + 1$ equazioni.

Dimostrazione. Un qualsiasi dato sistema lineare in n incognite è equivalente ad un opportuno sistema lineare a scala in n incognite; la matrice completa (a scala) di questo sistema, avendo $n + 1$ colonne, ha al più $n + 1$ righe non nulle; ciò significa il sistema a scala ha al più $n + 1$ equazioni diverse dall'identità $0 = 0$.