Lezione del 07.03.

Si è terminata la prima parte sui sistemi lineari (una seconda parte sui sistemi lineari verrà svolta in seguito usando i concetti e i risultati della teoria degli spazi vettoriali e applicazioni lineari) e si è iniziata la parte sugli spazi vettoriali. In particolare:

Si sono svolti un esercizio di discussione e risoluzione di un sistema dipendente da un parametro e un esercizio di determinazione di un sistema parametrico che soddisfi date richieste sulle soluzioni (sono riportati uno in parte ed uno per esteso di seguito).

Si è considerato l'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali con le operazioni di somma e prodotto e si sono evidenziate le proprietà di queste operazioni che sono rilevanti per la teoria degli spazi vettoriali reali; si è evidenziato come queste proprietà vengono usate per risolvere equazioni e si è introdotto il concetto di campo. Si è ricordato come si viene ad identificare l'insieme dei numeri reali con l'insieme dei punti della retta euclidea. (per questa parte cfr. Cap.2 Par.2.1 del testo; le parti non presenti nel testo sono riportate di seguito)

Si è considerato l'insieme $\mathbb{R}^2$ delle coppie ordinate di numeri reali con le operazioni di somma di due coppie e di prodotto di un numero reale per una coppia. Si è ricordato come si viene ad identificare l'insieme delle coppie ordinate di numeri reali con l'insieme dei punti del piano euclideo o meglio con l'insieme dei vettori applicati in un punto. Si è enunciato il fatto che in questa identificazione alle operazioni sulle coppie corrispondono le usuali operazioni di somma di vettori secondo la regola del parallelogramma e di prodotto di un numero reale per un vettore (per questa parte cfr. Cap.2 Par.2.2 del testo; le parti non presenti nel testo sono riportate di seguito).

Esercizio. È dato il sistema lineare nelle incognite x, y, z che ha la seguente matrice completa, dove α è un parametro in $\mathbb{R}$. (1) Si discuta al variare del parametro α l'esistenza di soluzioni, l'unicità il loro grado di infintà. (2) Quando possibile, si risolva il sistema e si dia una verifica della soluzione trovata.

$$(A|\underline{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & 6 & 5 & 4 \\ \alpha & \alpha+4 & 8 & 7 \\ 0 & \alpha-2 & \alpha+3 & 5 \end{array}\right)$$

(1) Alla matrice data applichiamo l'operazione $R_2 \to R_2 - R_1$; otteniamo

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & 6 & 5 & 4 \\ 0 & \alpha-2 & 3 & 3 \\ 0 & \alpha-2 & \alpha+3 & 5 \end{array}\right)$$

A questa matrice applichiamo l'operazione $R_3 \to R_3 - R_2$; otteniamo

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & 6 & 5 & 4 \\ 0 & \alpha-2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & \alpha & 2 \end{array}\right) = (A'|\underline{b}')$$

- Per α diverso da 0 e da 2, questa matrice è a scala, $rr(A') = rr(A'|\underline{b}') = 3$, dunque il sistema ha una ed una sola soluzione.

- Per $\alpha = 0$ si ha

$$(A'|\underline{b}') = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 6 & 5 & 4 \\ 0 & -2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

Osserviamo che la terza equazione del sistema è 0=2, dunque il sistema non ha alcuna soluzione. Di seguito mostriamo come si poteva proseguire senza questa osservazione. La matrice non è a scala. Applichiamo l'operazione $R_2 \to R_2 + \frac{1}{3}R_1$. Otteniamo

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 6 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & \frac{14}{3} & \frac{13}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right) = (A''|\underline{b}'')$$

Questa matrice è a scala, $rr(A'') = 2 < 3 = rr(A''|\underline{b}'')$, dunque il sistema non ha alcuna soluzione.

- Per $\alpha = 2$ si ha

$$(A'|\underline{b}') = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 6 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

La matrice non è a scala. Applichiamo l'operazione $R_3 \to R_3 - \frac{3}{2}R_1$. Otteniamo

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 6 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = (A''|\underline{b}'')$$

Questa matrice è a scala, $rr(A'') = 2 = rr(A''|\underline{b}'')$, dunque il sistema ha $\infty^{3-2} = \infty^1$ soluzioni.

(2) Si lascia questa parte per compito.

Esercizio. Sono dati la terna $\underline{s} = (1, 4, 6)$ e il sistema lineare nelle incognite x, y, z che ha la seguente matrice completa, dove k è un parametro in $\mathbb{R}$. Si determinino i valori del parametro k per i quali la terna $\underline{s}$ è la soluzione del sistema.

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 4 \\ k & -4 & 3 & 2k \end{array}\right)$$

Svolgimento. La terna $\underline{s} = (1, 4, 6)$ è una soluzione del sistema se e solo se soddisfa ciascuna equazione del sistema, cioè

$$\begin{cases} 2 + 8 - 6 = 4 \\ 2 - 4 + 6 = 4 \\ k - 16 + 18 = 2k \end{cases}$$

ciò capita se e solo se $k = 2$. Dobbiamo ora verificare se per $k = 2$ si ha che $\underline{s}$ è l'unica soluzione del sistema. Per $k = 2$ si ha la matrice

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 4 \\ 2 & -4 & 3 & 4 \end{array}\right).$$

Alla matrice applichiamo l'algoritmo di Gauss; otteniamo

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Il sistema ha ∞^1 soluzioni. Dunque non esiste alcun valore di k per il quale il sistema ha la soluzione $\underline{s}$.

Equazioni, campi

Equazioni. Uso delle proprietà della somma di numeri reali per una equazione $x+a=b$ nella incognita reale x ($a,b \in \mathbb{R}$). Una soluzione di $x+a=b$ è anche soluzione di $(x+a)+(-a)=b+(-a)$; si ha $(x+a)+(-a)=x+(a+(-a))=x+0=x$; dunque se l'equazione ha una soluzione, essa è $x=b+(-a)$; si verifica che questa è davvero una soluzione; dunque l'equazione $x+a=b$ ha una ed una sola soluzione data da $x=b+(-a)$; solitamente al posto di $b+(-a)$ si scrive $b-a$. Analogamente per l'uso delle proprietà del prodotto di numeri reali per una equazione $ax=b$ nella incognita reale x ($a,b \in \mathbb{R}$ con $a \neq 0$).

Definizione. Si dice "campo" un insieme $\mathbb{K}$ con una operazione di somma $+ : \mathbb{K}\times\mathbb{K} \to \mathbb{K}$ ed una operazione di prodotto $\cdot : \mathbb{K}\times\mathbb{K} \to \mathbb{K}$ tali che che: (1) la somma sia asssociativa, commutativa, ammetta un elemento neutro 0, e sia tale che ogni elemento possegga un opposto; (2) il prodotto sia asssociativo, commutativo, ammetta un elemento neutro 1, e sia tale che ogni elemento diverso da 0 possegga un inverso; (3) il prodotto sia distributivo rispetto alla somma.

Esempi di campi sono: i razionali $\mathbb{Q}$, i reali $\mathbb{R}$, e i complessi $\mathbb{C}$ con le usuali operazioni di somma e prodotto. Esempi di non campi sono i naturali $\mathbb{N}$ e gli interi relativi $\mathbb{Z}$ con le usuali operazioni di somma e di prodotto.

Rappresentazione geometrica di $\mathbb{R}$ ed $\mathbb{R}^2$.

Identificazione dell'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali con l'insieme r dei punti della retta euclidea. Un sistema di riferimento sulla retta r è dato da un punto O ed un punto U, distinti, detti punto origine punto unità. Fissato sulla retta r un tale sistema di riferimento, si definisce una funzione $\mathbb{R} \to r$, $x \mapsto P_x$ dove P_x è l'unico punto di r tale che: (1) la misura del segmento OP_x rispetto al segmento OU 'e il valore assoluto $|x|$ di x; (2) nell'ordinamento dei punti della retta nel quale O precede U, si ha che P_x segue o precede O secondo che x sia maggiore o minore di 0. Questa funzione risulta essere biiettiva. La stessa funzione, ristretta all'insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali è iniettiva ma non è suriettiva.

Identificazione dell'insieme $\mathbb{R}^2$ delle coppie ordinate di numeri reali con l'insieme π dei punti del piano euclideo. Un sistema di riferimento sul piano π è dato da un punto O detto origine e da due rette distinte r_1 ed r_2 passanti per O, con rispettivi punti unità U_1 e U_2, diversi da O. Solitamente si prendono due rette fra loro ortogonali e due punti unità alla stessa distanza da O. Fissato sul piano π un tale sistema di riferimento, si ha una identificazione di $\mathbb{R}$ con r_1 ed una con r_2, e si definisce una funzione $\mathbb{R}^2 \to \pi$ nel modo seguente. Una coppia (a_1, a_2) viene mandata nel punto del piano ottenuto considerando la retta per a_1 parallela a r_2, la retta per a_2 parallela ad r_1, ed intersecando queste due rette.