Lezione del 14.03.

Si sono considerati l'insieme $\mathbb{R}^2$ delle coppie ordinate di numeri reali, l'insieme $\mathcal{V}_o^2$ dei vettori del piano applicati in un punto O e l'insieme $F(\mathbb{R})$ delle funzioni reali di variabile reale (più brevemente), ciascuno munito di una operazione di somma di due elementi e di una operazione di prodotto di un numero reale per un elemento; si è mostrato che le due operazioni su ciascun insieme, e le operazioni sui numeri reali, soddisfano certe proprietà.

Si è definito "spazio vettoriale" su $\mathbb{R}$ un qualsiasi insieme, dotato di una operazione di somma di due suoi elementi ed una operazione di prodotto di un numero reale per un suo elemento, che soddisfino quelle proprietà.

Si sono mostrati i seguenti ulteriori esempi di spazi vettoriali: (1) per ogni intero positivo n fissato, l'insieme $\mathbb{R}^n$ delle ennuple ordinate di numeri reali, dotato della operazione di somma di due ennuple e della operazione di prodotto di un numero reale per una ennupla, definite componente per componente; (2) l'insieme $\mathcal{V}_o^3$ dei vettori dello spazio applicati in un punto fissato O, dotato della operazione di somma di due vettori e della operazione di prodotto di un numero reale per un vettore, definite geometricamente rispettivamente mediante regola del parallelogramma e dilatazioni; (3) l'insieme $\mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ delle matrici di tipo $m \times n$ ad elementi reali, dotato delle operazioni di somma di due matrici e di prodotto di un numero reale per una matrice, definite elemento per elemento; (4) l'insieme $F(A, \mathbb{R})$ delle funzioni da un insieme A ad $\mathbb{R}$, dotato delle operazioni di somma di due funzioni e di prodotto di un numero reale per una funzione, definite punto per punto.

Si è dedotto dagli assiomi un primo fatto (per la somma, unicità dell'elemento neutro e degli opposti) e si è mostrato come gli assiomi assicurino l'esistenza e l'unicità di soluzioni delle più semplici equazioni vettoriali.

Di seguito si riportano la definizione di spazio vettoriale ed alcune parti che sono state trattate in un modo un poco diverso dal testo.

Riferimenti: Cap.2 "Spazi vettoriali", Par.2.2 "Spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ e spazio delle matrici" (fine) e Par.2.3 "Spazi vettoriali" (inizio).

Definzione di spazio vettoriale

Definizione. Uno "spazio vettoriale" sul campo $\mathbb{R}$ è un insieme V (un qualsiasi insieme) dotato di un'operazione $+ : V \times V \to V$ ed un'operazione $\cdot : \mathbb{R} \times V \to V$ che soddisfano certe proprietà. Per convenzione, gli elementi di V si dicono "vettori", i numeri reali "scalari", l'operazione $+$ "somma" di vettori e l'operazione $\cdot$ "prodotto" di scalari per vettori. Si richiede che siano soddisfatte:

- per l'operazione $+$, le usuali proprietà della somma di numeri reali: associatività, commutatività, esistenza di un elemento neutro, e per ciascun elemento esistenza di un opposto; esplicitamente

$$
\begin{array}{lll}
(1) & (\underline{u}+\underline{v})+\underline{w} = \underline{u}+(\underline{v}+\underline{w}) & \forall \underline{u},\underline{v},\underline{w} \in V \\
(2) & \underline{u}+\underline{v} = \underline{v}+\underline{u} & \forall \underline{u},\underline{v} \in V \\
(3) & \exists \underline{0} \in V : \ \underline{v}+\underline{0} = \underline{v}, & \forall \underline{v} \in V \\
(4) & \forall \underline{v} \in V \ \exists \underline{v}' \in V : \ \underline{v}+\underline{v}' = \underline{0} &
\end{array}
$$

- per l'operazione $\cdot$, proprietà che la legano alle altre operazioni di somma in V, di somma in $\mathbb{R}$, di prodotto in $\mathbb{R}$, e al numero reale 1:

$$
\begin{array}{lll}
(5) & \lambda \cdot (\underline{u} + \underline{v}) = \lambda \cdot \underline{u} + \lambda \cdot \underline{v} & \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \underline{u}, \underline{v} \in V \\
(6) & (\lambda + \mu) \cdot \underline{v} = \lambda \cdot \underline{v} + \mu \cdot \underline{v} & \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ \underline{v} \in V \\
(7) & (\lambda\mu) \cdot \underline{v} = \lambda \cdot (\mu \cdot \underline{v}) & \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ \underline{v} \in V \\
(8) & 1 \cdot \underline{v} = \underline{v} & \forall \underline{v} \in V
\end{array}
$$

Commenti. La (3) afferma che esiste UN elemento neutro (convenzionalmente indicato con $\underline{0}$) che sommato ad ogni altro restituisce l'altro. La (4) afferma che per ogni elemento esiste UN elemento opposto, che sommato ad esso fornisce un elemento neutro. Nella (6), al primo membro compare la somma di scalari e al secondo membro compare la somma di vettori. Nella (7), al primo membro compaiono il prodotto di scalari e il prodotto di scalari per vettori e al secondo membro solo il prodotto di scalari per vettori (due volte).

Di regola, indichiamo i vettori con lettere minuscole sottolineate dell'alfabeto latino $\underline{a}, \underline{b}, \ldots$ e gli scalari con lettere minuscole dell'alfabeto greco $\alpha, \beta, \ldots$.

Esempi

Ennuple di numeri reali. Per ogni intero positivo n fissato, l'insieme $\mathbb{R}^n$ delle $n-$ple ordinate $\underline{a} = (a_1, \ldots, a_n) = (a_i)_1^n$ di numeri reali, con le operazioni di somma di due ennuple e di prodotto di un numero reale per una ennupla definite componente per componente, è uno spazio vettoriale. La $n-$pla nulla $\underline{0} = (0, \ldots, 0)$ è l'elemento neutro per la somma; ogni ennupla $(a_i)_1^n$ ha una ennupla opposta $-(a_i)_1^n = (-a_i)_1^n$. Le proprietà della somma di ennuple e del prodotto di numeri reali per ennuple derivano dalle proprietà della somma e del prodotto su $\mathbb{R}$.

Matrici. Per ogni due interi positivi m, n fissati, l'insieme $\mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ delle matrici $A = (a_{ij})_{i=1,\ldots,m;\ j=1,\ldots,n}$ di tipo $m \times n$ ad elementi reali, con le operazioni di somma di due matrici e di prodotto di un numero reale per una matrice definite elemento per elemento, è uno spazio vettoriale. La matrice nulla $0_{m,n} = (0)_{i=1,\ldots,m;\ j=1,\ldots,n}$ è l'elemento neutro per la somma; ogni matrice (a_{ij}) ha una matrice opposta $-(a_{ij}) = (-a_{ij})$. Le proprietà della somma di matrici e del prodotto di numeri reali per matrici derivano dalle proprietà della somma e del prodotto su $\mathbb{R}$.

Vettori applicati in un punto del piano. Fissato un punto O del piano, denotiamo con $\mathcal{V}_o^2$ l'insieme dei vettori del piano applicati in O.

Il vettore di $\mathcal{V}_o^2$ che ha lunghezza 0 si dice "vettore nullo" e si indica con $\underline{0}$. Per ogni vettore $\underline{v}$ in $\mathcal{V}_o^2$, si indica con $-\underline{v}$ il vettore che ha la stessa direzione, la stessa lunghezza, e verso oppoosto a $\underline{v}$.

- Si definisce la somma di due vettori $\underline{u}$ e $\underline{v}$ in $\mathcal{V}_o^2$ come il vettore $\underline{u} + \underline{v} = underlinew$ ottenuto nel modo seguente: si trasla il vettore $\underline{v}$ in modo da ottenere un vettore $\underline{v}'$ applicato nel punto termine di $\underline{u}$ e si prende $\underline{w}$ come il vettore che ha punto origine il punto origine di $\underline{u}$, che è O, ed ha punto termine il punto termine di $\underline{v}'$.

- Si definisce il prodotto di un numero reale λ per un vettore $\underline{v} \in \mathcal{V}_o^2$ come il vettore $\lambda\underline{v} = \underline{w}$ ottenuto nel modo seguente: si prende $\underline{w}$ come il vettore applicato in O che ha la stessa direzione di $\underline{v}$ e lunghezza uguale a $|\lambda|$ (valore assoluto) per la lunghezza di $\underline{v}$ e verso uguale o opposto al verso di $\underline{v}$ secondo che λ sia maggiore o minore di zero (se $\lambda = 0$ oppure $\underline{v} = \underline{0}$ si prende $\underline{w} = \underline{0}$).

Chiaramente il vettore nullo è l'elemento neutro per la somma di vettori, e ciascun vettore $\underline{v}$ ha come opposto il vettore $-\underline{v}$. La verifica delle proprietà delle operazioni in $\mathcal{V}_o^2$ è di tipo geometrico. Ad esempio: la proprietà commutativa (2) della somma deriva dal fatto che se in un quadrilatero (non intrecciato) due lati opposti sono paralleli della stessa lunghezza allora anche gli altri due lati opposti sono paralleli della stessa lunghezza. Per compito, si lascia al lettore di rappresentare graficamente la (5).

Si noti che per definire l'insieme $\mathcal{V}_o^2$ e le operazioni, non si è fissato nessun riferimento al di fuori del punto O.

Vettori applicati in un punto dello spazio. Fissato un punto O dello spazio, denotiamo con $\mathcal{V}_o^3$ l'insieme dei vettori dello spazio applicati in O. Il vettore nullo, il vettore opposto di un vettore, l'operazione di somma di due vettori e l'operazione di prodotto di un numero reale per un vettore sono definiti esattamente come nel caso del piano.

Funzioni reali di una variabile reale. Con $F(\mathbb{R})$ indichiamo l'insieme delle funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Si dice che due funzioni sono uguali se in ciascun punto il valore dell'una è uguale al valore dell'altra, in simboli: per ogni due funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si pone $f = g$ se $f(x) = g(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. La funzione che in ciascun punto assume valore 0 si dice "funzione nulla" e si denota con $\underline{0}$; per ogni funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si definisce la funzione $-f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ponendo $(-f)(x) = -f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

- Si definisce la funzione somma di due funzioni $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ come la funzione $(f + g) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, per ogni $x \in \mathbb{R}$.

- Si definisce il prodotto di un numero reale λ per una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ come la funzione $(\lambda f) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$, per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Funzioni reali. Per ciascun insieme A, con $F(A, \mathbb{R})$ indichiamo l'insieme delle funzioni $f : A \to \mathbb{R}$. La funzione nulla, la funzione opposta di una funzione, l'operazione di somma di due funzioni e l'operazione di prodotto di un numero reale per una funzione sono definiti esattamente come nel caso del piano. Lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ delle $n-$ple ordinate di numeri reali può essere identificato con lo spazio vettoriale $F(\{1, \ldots, n\}, \mathbb{R})$ delle funzioni $\{1, \ldots, n\} \to \mathbb{R}$. Lo spazio vettoriale $\mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ delle matrici di tipo $m \times n$ ad elementi reali può essere identificato con lo spazio vettoriale $F(\{1, \ldots, n\} \times \{1, \ldots, n\}, \mathbb{R})$ delle funzioni $\{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, n\} \to \mathbb{R}$.

Prime conseguenze degli assiomi

Proposizione (unicità). Per l'operazione di somma di vettori: esiste un'unico elemento neutro, che viene detto "vettore nullo" ed indicato con $\underline{0}$; ciascun vettore $\underline{v}$ possiede un'unico opposto, che viene denotato con $-\underline{v}$.

Commento. Per la Proposizione, i simboli introdotti hanno il seguente significato: $\underline{0}$ è IL vettore caratterizzato dalle uguaglianze $\underline{0} + \underline{v} = \underline{v} = \underline{v} + \underline{0}$, $\forall \underline{v}$; per ciascun vettore $\underline{v}$, $-\underline{v}$ è IL vettore caratterizzato dall'uguaglianza $\underline{v} + (-\underline{v}) = \underline{0} = -\underline{v} + \underline{v}$.

Dimostrazione.

Unicità dell'elemento neutro. Siano $\underline{0}'$ e $\underline{0}''$ due (eventualmente diversi) elementi neutri per la somma di vettori; consideriamo il vettore $\underline{0}' + \underline{0}''$ ed osserviamo che è uguale a $\underline{0}'$ (essendo $\underline{0}''$ un elemento neutro) ed è uguale a $\underline{0}''$ (essendo $\underline{0}'$ un elemento neutro); dunque $\underline{0}' = \underline{0}''$.

Unicità dell'opposto. Siano $\underline{v}'$ e $\underline{v}''$ due (eventualmente diversi) opposti di uno stesso vettore $\underline{v}$; si ha

$$\underline{v}' = \underline{v}' + \underline{0} = \underline{v}' + (\underline{v} + \underline{v}'') = (\underline{v}' + \underline{v}) + \underline{v}'' = \underline{0} + \underline{v}'' = \underline{v}''$$

dunque $\underline{v}' = \underline{v}''$.

Gli assiomi di spazio vettoriale garantiscono che le più semplici equazioni vettoriali abbiano una ed una sola soluzione, come specificato dalla seguente

Proposizione. In ogni spazio vettoriale V,

(1) ogni equazione nell'incognita $\underline{x}$

$$\underline{x} + \underline{a} = \underline{b}$$

ha una ed una sola soluzione, data da

$$\underline{x} = \underline{b} + (-\underline{a}) = \text{ per convenzione } = \underline{a} - \underline{b};$$

(2) ogni equazione nell'incognita $\underline{x}$

$$\alpha\underline{x} = \underline{b},$$

sotto la coindizione $\alpha \neq 0$, ha una ed una sola soluzione, data da

$$\underline{x} = \alpha^{-1}\underline{b}.$$

Dimostrazione della (1). Consideriamo l'equazione $\underline{x} + \underline{a} = \underline{b}$. Sommando $-\underline{a}$ al primo membro dell'equazione si ottiene $(\underline{x}+\underline{a})+(-\underline{a}) = \underline{x}+(\underline{a}+(-\underline{a})) = \underline{x}+\underline{0} = \underline{x}$. Sommando $-\underline{a}$ al secondo membro dell'equazione si ottiene $\underline{b} + (-\underline{a})$. Dunque, se l'equazione ha soluzione, essa è $\underline{x} = \underline{b}+(-\underline{a})$. Questa è una soluzione, in quanto sostituta all'incognita rende vera l'uguaglianza.