Lezione del 20.03.

Ci sono vari tipi di strutture che conducono al concetto di spazio vettoriale, in particolare quelle sugli insiemi $\mathbb{R}^n$ di ennuple di numeri reali ($n = 1, 2, 3, \ldots$) e quelle sugli insiemi $\mathcal{V}_o^n$ di vettori geometrici applicati in un punto ($n = 1, 2, 3$).

Ricordiamo sinteticamente la definizione. Uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{R}$ è un insieme V (un qualsiasi insieme) dotato di un'operazione $+_V : V \times V \to V$ ed un'operazione $\cdot_V : \mathbb{R} \times V \to V$ che soddisfano certe proprietà. Per convenzione, gli elementi di V si dicono "vettori", i numeri reali "scalari", l'operazione $+_V$ "somma di vettori" e l'operazione $\cdot_V$ "prodotto di scalari per vettori". Si richiede che siano soddisfatte:

- per l'operazione $+_V$, le usuali proprietà della somma di numeri reali (associatività, commutatività, esistenza di un elemento neutro, e per ciascun elemento esistenza di un opposto);

- per l'operazione $\cdot_V$, proprietà che la legano alle altre operazioni $+, \cdot$ (sui numeri reali), $+_V$, e al numero reale 1.

Di regola, indichiamo i vettori con lettere minuscole sottolineate dell'alfabeto latino $\underline{a}, \underline{b}, \ldots$ e gli scalari con lettere minuscole dell'alfabeto greco $\alpha, \beta, \ldots$. Quando non ci sia pericolo di ambiguità, scriviamo $\cdot$ e $+$ al posto di $\cdot_V$ e $+_V$, ed indichiamo il prodotto di due numeri reali con la loro giustapposizione.

Dalle proprietà definitorie (assiomi) degli spazi vettoriali si deducono altre proprietà. Di seguito, sia V uno spazio vettoriale.

Proposizione (unicità). Per l'operazione $+_V$ di somma di vettori: esiste un'unico elemento neutro, che viene detto "vettore nullo" ed indicato con $\underline{0}$; ciascun vettore $\underline{v}$ possiede un'unico opposto, che viene denotato con $-\underline{v}$. (Dimostrazione nella lezione scorsa).

Dunque: $\underline{0}$ è il vettore caratterizzato dalle doppie uguaglianze $\underline{0} + \underline{v} = \underline{v} = \underline{v} + \underline{0}$, $(\forall \underline{v})$ (anche singole, per la commutatività di $+_V$); per ciascun vettore $\underline{v}$, l'opposto $-\underline{v}$ è il vettore caratterizzato dall'uguaglianza doppia $\underline{v} + (-\underline{v}) = \underline{0} = -\underline{v} + \underline{v}$ (anche singola, per la commutatività di $+_V$).

Proposizione (proprietà di 0 e di $\underline{0}$ rispetto a $\cdot_V$)

$$\begin{array}{lll} (1) & \lambda \cdot \underline{0} = \underline{0} & \forall \lambda \\ (2) & 0 \cdot \underline{v} = \underline{0} & \forall \underline{v} \\ (3) & \lambda \cdot \underline{v} = \underline{0} & \text{implica} \quad \lambda = 0 \quad \text{oppure } \underline{v} = \underline{0} \end{array}$$

Nella (3) la congiunzione "oppure" è usata in senso non esclusivo.

Dimostrazione della (3). Siano λ e $\underline{v}$ tali che $\lambda \cdot \underline{v} = \underline{0}$; distinguiamo due casi: (1) se $\lambda = 0$, allora la tesi è ovviamente soddisfatta; (2) se $\lambda \neq 0$, allora esiste λ^{-1} e dall'uguaglinza $\lambda \cdot \underline{v} = \underline{0}$ deduciamo l'uguaglianza $\lambda^{-1} \cdot (\lambda \cdot \underline{v}) = \lambda^{-1} \cdot \underline{0}$; al primo membro, per le proprietà che legano il prodotto per scalari al prodotto in $\mathbb{R}$ ed al numero uno, si ha $\lambda^{-1} \cdot (\lambda \cdot \underline{v}) = (\lambda^{-1}\lambda) \cdot \underline{v} = 1 \cdot \underline{v} = \underline{v}$; al secondo mebro, per la (1) si ha $\lambda^{-1} \cdot \underline{0} = \underline{0}$; dunque, $\underline{v} = \underline{0}$ e la tesi è soddisfatta.

Proposizione (relazione fra $\cdot_V$, opposti in $\mathbb{R}$ e opposti in V).

$$(-\lambda)\cdot \underline{v} = -(\lambda\cdot\underline{v}) = \lambda\cdot(-\underline{v}), \qquad \forall\lambda,\underline{v}.$$

Dimostrazione della prima uguaglianza. Bisogna provare che $\lambda\cdot\underline{v}+(-\lambda)\cdot\underline{v}=\underline{0}$; infatti: per la proprietà che lega $\cdot_V$ a $+_V$ e a $+$, per la proprietà caratteristica degli opposti in $\mathbb{R}$, e per la proprietà dello 0 rispetto a $\cdot_V$ si ha $\lambda\cdot\underline{v}+(-\lambda)\cdot\underline{v}=(\lambda+(-\lambda))\cdot\underline{v}=0\cdot\underline{v}=\underline{0}$.

Osservazione. Per ogni $\underline{v}$ si ha $(-1)\cdot\underline{v} = -(1\cdot\underline{v}) = -\underline{v}$ dunque $(-1)\cdot\underline{v} = -\underline{v}$ (questa uguaglianza può essere percepita come il permanere in astratto del seguente fatto sui vettori geometrici: per ciascun vettore geometrico $\underline{v}$, per la definizione di prodotto di scalari per vettori $(-1)\cdot\underline{v}$ è il vettore $\underline{v}'$ avente la stessa direzione e la stessa lunghezza ma verso opposto a $\underline{v}$, e per la defինzione di somma mediante la regola del parallelogramma (caso degenere) $\underline{v}+\underline{v}'=\underline{0}$)

Alcune questioni: (1) Esiste uno spazio vettoriale vuoto? (2) Uno spazio vettoriale con un solo vettore? (3) Cosa si può dire di uno spazio vettoriale che ha almeno due vettori? Risposte:

(1) No, ogni spazio vettoriale deve contenere almeno un elemento, il vettore nullo $\underline{0}$.

(2) Su un insieme con un solo elemento $\underline{0}$, le operazioni di somma e di prodotto per scalari possono essere definite in un solo modo: $\underline{0}+\underline{0}=\underline{0}$, e $\lambda\cdot\underline{0}=\underline{0}$ per ogni λ; queste operazioni soddisfano tutte le identità (in quanto ad entrambi i mebri si ottiene sempre $\underline{0}$); inoltre $\underline{0}$ è effettivamente elemento neutro, ed è anche l'opposto di se stesso; dunque c'è essenzialmente uno ed un solo spazio vettoriale con un solo elemento. Questo spazio vettoriale si dice "spazio vettoriale nullo". (un modello geometrico è lo spazio vettoriale geometrico $\mathcal{V}_o^0$ 0-dimensionale su un punto O).

(3) Supponiamo che in uno spazio vettoriale V esista un vettore $\underline{v}\neq\underline{0}$; in V ci sono anche i vettori $\lambda\underline{v}$, con λ variabile in $\mathbb{R}$; si ha che a scalari diversi corrispondono vettori diversi, cioè, sotto le condizioni $\underline{v}\neq\underline{0}$ e $\lambda\neq\mu$, l'uguaglianza $\lambda\underline{v}=\mu\underline{v}$ non può sussistere; infatti essa implica la $\lambda\underline{v}-\mu\underline{v}=\underline{0}$ che implica $(\lambda-\mu)\underline{v}=\underline{0}$ in contraddizione con la (3) della proposizione sulle proprietà di 0 e $\underline{0}$ rispetto a $\cdot_V$. Dunque si hanno tanti vettori $\lambda\underline{v}$ quanti numeri reali, cioè infiniti; in conclusione, se uno spazio vettoriale ha almeno un vettore non nullo, allora ne ha infiniti. (L'insieme dei vettori $\lambda\underline{v}$ può essere pensato come una copia della retta reale dentro V).

Sottospazio di uno spazio vettoriale

Fissato nello spazio euclideo un punto O, consideriamo lo spazio vettoriale $\mathcal{V}_o^3$ dei vettori applicati in O; fissato un piano contenente O, osserviamo che: (1) la somma di due vettori che stanno sul piano è un vettore che sta ancora sul piano (se due lati di un parallelogramma stanno sul piano, allora tutto il parallelogramma sta sul piano); (2) il prodotto di uno scalare per un vettore che sta sul piano è un vettore che sta ancora sul piano (se un segmento sta sul piano, allora anche la retta che lo contiene sta sul piano). Lo stesso accade fissata una retta contenente O. Questi fatti suggeriscono la seguente

Definizione. Sia V uno spazio vettoriale e sia $W\subseteq V$ un sottinsieme di V. Si dice che W è un sottospazio di V se

(1) $\underline{a},\underline{b}\in W$ implica $\underline{a}+\underline{b}\in W$ $(\forall\underline{a},\underline{b})$;

(2) $\underline{a} \in W$ implica $\lambda\underline{a} \in W$ $(\forall\lambda, \underline{a})$;

(3) $W \neq \emptyset$ (W non è vuoto).

In breve, la (1) e la (2) si riassumono dicendo rispettivamente che W è chiuso rispetto a $+_V$ e che W è chiuso rispetto a $\cdot_V$.

Fatto. Se W è un sottospazio di V, allora

- l'operazione $+_W : W \times W \to W$ definita da $\underline{a} +_W \underline{b} = \underline{a} +_V \underline{b}$, e l'operazione $\cdot_W$: $\mathbb{R} \times W \to W$ definita da $\lambda \cdot_W \underline{a} = \lambda \cdot_V \underline{a}$, sono ben definite e soddisfano tutte le identità soddisfatte dalle operazioni $+_V$ e $\cdot_V$;

- il vettore $\underline{0} \in W$, in quanto: esiste almeno un vettore $\underline{v} \in W$ (per la (3)), $0 \cdot \underline{v} \in W$ (per la (2)), e $0 \cdot \underline{v} = \underline{0}$;

-per ciascun $\underline{v} \in W$, anche $-\underline{v} \in W$, in quanto: $(-1)\cdot\underline{v} \in W$ (per la (2)), e $(-1)\cdot\underline{v} = -\underline{v}$.

Dunque W, con queste operazioni, è uno spazio vettoriale.

Da queste considerazioni segue che nella definzione di sottospazio la proprietà (3) può essere sostituita con la proprietà

(3') $\underline{0} \in W$.

Esempio 1. Consideriamo il sottinsieme $W = \{(x, 0);\ x \in \mathbb{R}\}$ di $\mathbb{R}^2$. Fissato un sistema di riferimento nel piano con origine in un punto O, si ha che W è rappresentato dall'insieme dei vettori applicati in O che stanno sulla retta primo asse del riferimento ... si vede che W è un sottospazio. Algebricamente si ha:

W è chiuso rispetto alla somma, in quanto per ogni due vettori $(x_1, 0)$ e $(x_2, 0)$ in W, anche $(x_1, 0) + (x_2, 0) = (x_1 + x_2, 0)$ sta in W;

W è chiuso rispetto al prodotto per scalari, in quanto per ogni scalare $\lambda \in \mathbb{R}$ ed ogni vettore $(x, 0)$ in W, anche $\lambda(x, 0) = (\lambda x, 0)$ sta in W;

$(0, 0) \in W$.

Dunque W è un sottospazio di $\mathbb{R}^2$.

Esempio 2. Consideriamo il sottinsieme $Z = \{(x, y);\ y = x^2\}$ di $\mathbb{R}^2$. Fissato un sistema di riferimento nel piano con origine in un punto O, si ha che Z è rappresentato dall'insieme dei vettori applicati in O che hanno estremo libero su una parabola ... si vede che Z non è un sottospazio. Algebricamente, si ha che Z non è chiuso rispetto alla somma, in quanto esistono due vettori che stanno in Z, ad esempio $(1, 1)$ e $(-1, 1)$, la cui somma $(1, 1) + (-1, 1) = (0, 2)$ non sta in Z, e questo basta per affermare che Z non è un sottospazio di $\mathbb{R}^2$.

Esempio 3. Consideriamo il sottinsieme $Y = \{(x, y);\ y = x + 1\}$ di $\mathbb{R}^2$. Fissato un sistema di riferimento nel piano con origine in un punto O, si ha che Y è rappresentato dall'insieme dei vettori applicati in O che hanno esttremo libero su una retta che non passa per O ... si vede che Y non possiede alcuna delle proprietà di sottospazio. Algebricamente, si ha che $(0, 0) \notin Y$, e questo basta per affermare che Y non è un sottospazio di $\mathbb{R}^2$.

Problema 1. Stabilire se $W = \{(x, y);\ 2x + 3y = 0\}$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^2$.

Ci chiediamo: è vero che se $\underline{v}_1 = (x_1, y_1)$ e $\underline{v}_2 = (x_2, y_2)$ stanno in W allora anche $\underline{v}_1 + \underline{v}_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ sta in W? Specificamente: è vero che se $2x_1 + 3y_1 = 0$ e $2x_2 + 3y_2 = 0$ allora anche $2(x_1 + x_2) + 3(y_1 + y_2) = 0$? È vero, in quanto

$$2(x_1 + x_2) + 3(y_1 + y_2) = (2x_1 + 3y_1) + (2x_2 + 3y_2) = 0 + 0 = 0.$$

Ci chiediamo: è vero che se $\lambda \in \mathbb{R}$ e $\underline{v}_1 = (x_1, y_1)$ sta in W allora anche $\lambda \underline{v_1} = (\lambda x_1, \lambda y_1)$ sta in W? Specificamente: è vero che se $2x_1+3y_1 = 0$ allora anche $2(\lambda x_1)+3(\lambda y_1) = 0$? È vero, in quanto

$$2(\lambda x_1) + 3(\lambda y_1) = \lambda(2x_1 + 3y_1) = \lambda \cdot 0 = 0.$$

Ci chiediamo: è vero che $(0, 0)$ sta in W? È vero, in quanto $2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 = 0$.

Dunque W è un sottospazio di $\mathbb{R}^2$.

L'insieme considerato nel problema 1 è descritto implicitamente, tramite una equazione. Lo stesso insieme può essere descritto esplicitamente, risolvendo l'equazione. Mostriamo di seguito come questo cambiamento di descrizione dell'insieme cambia il modo di risolvere il problema.

Problema 1'. Stabilire se $W = \{(x, -(2/3)x);\ x \in \mathbb{R}\}$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^2$.

Ci chiediamo: è vero che per ogni due vettori $\underline{v}_1 = (r, -(2/3)r)$ e $\underline{v}_2 = (s, -(2/3)s)$ del tipo $(x, -(2/3)x)$, anche il vettore $\underline{v}_1 + \underline{v}_2 = (r + s, -(2/3)r - (2/3)s)$ è del tipo $(x, -(2/3)x)$? È vero, in quanto

$$(r + s, -(2/3)r - (2/3)s) = (r + s, -(2/3)(r + s)).$$

Ci chiediamo: è vero che per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ ed ogni vettore $\underline{v}_1 = (r, -(2/3)r)$ del tipo $(x, -(2/3)x)$, anche il vettore $\lambda \underline{v}_1 = (\lambda r, \lambda(-(2/3)r))$ è del tipo $(x, -(2/3)x)$? È vero, in quanto

$$(\lambda r, \lambda(-(2/3)r)) = (\lambda r, -(2/3)\lambda r).$$

$(0, 0)$ sta in W in quanto per $x = 0$ si ha $(x, -(2/3)x) = (0, 0)$.

Dunque W è un sottospazio di $\mathbb{R}^2$.

Fatto. Fissato un sistema di riferimento nel piano con origine in un punto O, identifichiamo lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^2$ con lo spazio vettoriale $\mathcal{V}_o^3$. L'insieme delle soluzioni di un'equazione lineare $ax + by = c$ (con uno almeno fra $a, b \neq 0$) è identificato con l'insieme dei vettori applicati in O che terminano in punti di una retta del piano; alle equazioni $ax + by = 0$ con termine noto nullo corrispondono gli insiemi di vettori che stanno sulle rette per O; questi ultimi insiemi sono sottospazi di $\mathcal{V}_o^2$. Duunque per ogni equazione lineare $ax + by = 0$ (con uno almeno fra $a, b \neq 0$), l'insieme delle soluzioni è un sottospazio di $\mathbb{R}^2$; anche l'equazione lineare $0x+0y = 0$ ha insieme delle soluzioni un sottospazio di $\mathbb{R}^2$, cioè $\mathbb{R}^2$ stesso. Di seguito mostriamo che questo fatto è una istanza di un fatto generale.

Definizione. Un'equazione lineare si dice "omogenea" se ha termine noto nullo, cioè è del tipo

$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0 \qquad (a_i \text{ costanti} \in \mathbb{R}).$$

Proposizione. L'insieme delle soluzioni di un'equazione lineare omogenea in n incognite $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0$ (a_i costanti in $\mathbb{R}$) è un sottospazio di $\mathbb{R}^n$.

Dimostrazione.

L'affermazione " se $\underline{v}' = (x_1', \dots, x_n')$ e $\underline{v}'' = (x_1'', \dots, x_n'')$ sono soluzioni dell'equazione allora anche $\underline{v}' + \underline{v}'' = (x_1' + x_2', \dots, x_n' + x_n'')$ è una soluzione dell'equazione " cioè " se $a_1x_1' + \cdots + a_nx_n' = 0$ e $a_1x_1'' + \cdots + a_nx_n'' = 0$ allora anche $a_1(x_1' + x_1'') + \cdots + a_n(x_n' + x_n'') = 0$ " è vera, in quanto

$$a_1(x_1' + x_1'') + \cdots + a_n(x_n' + x_n'') = (a_1x_1' + \cdots + a_nx_n') + (a_1x_1'' + \cdots + a_nx_n'') = 0 + 0 = 0.$$

L'affermazione " se $\lambda \in \mathbb{R}$ e $\underline{v}' = (x_1', \dots, x_n')$ è una soluzione dell'equazione allora anche $\lambda\underline{v}' = (\lambda x_1', \dots, \lambda x_n')$ è una soluzione dell'equazione " cioè " se $\lambda \in \mathbb{R}$ e $a_1x_1' + \cdots + a_nx_n' = 0$ allora anche $a_1(\lambda x_1') + \cdots + a_n(\lambda x_n') = 0$ " è vera, in quanto

$$a_1(\lambda x_1') + \cdots + a_n(\lambda x_n') = \lambda(a_1x_1' + \cdots + a_nx_n') = \lambda \cdot 0 = 0.$$

Il vettore $\underline{0} = (0, \dots, 0)$ è una soluzione dell'equazione, in quanto $a_1 \cdot 0 + \cdots + a_n \cdot 0 = 0$.

Operazioni sui sottospazi. Applicazione

Proposizione. Siano W_1 e W_2 due sottinsiemi di uno spazio vettoriale V. Se W_1 e W_2 sono sottospazi di V, allora anche la loro intersezione $W_1 \cap W_2$ è un sottospazio di V.

La dimostrazione è lasciata per esercizio (cfr anche sul testo). Questa proposizione si estende anche a un numero finito (in realtà anche infinito) qualsiasi di sottospazi.

Definzione. Un sistema lineare si dice "omgeneo" se ogni sua equazione è omogenea, cioè se è del tipo

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}, \quad \text{in breve} \quad A\underline{x} = \underline{0}.$$

Proposizione. L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo in n incognite è un sottospazio di $\mathbb{R}^n$.

Dimostrazione. Sia m il numero delle equazioni del sistema. Indicato con Z_i l'insieme delle soluzioni della $i-$ma equazione ($i = 1, 2, \dots, m$) e con Z l'insieme delle soluzioni del sistema, si ha: ciascun Z_i è un sottospazio di $\mathbb{R}^n$ (in quanto ciascuna equazione del sistema è lineare omogenea); Z è dato da

$$Z = Z_1 \cap \cdots \cap Z_m;$$

dunque Z è un sottospazio di $\mathbb{R}^n$.

Esempio. L'insieme delle soluzioni del sistema lineare omogeneo di 3 equazioni in 5 incognite che ha matrice completa

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & -7 & 0 \end{array}\right),$$

che può anche essere descritto esplicitamente come l'insieme dei vettori del tipo

$$(2x_4 + 3x_5, 4x_4 + 5x_5, 6x_4 + 7x_5, x_4, x_5), \quad x_4, x_5 \in \mathbb{R},$$

è un sottospazio di $\mathbb{R}^5$.

L'affermazione "l'unione di due sottospazi è un sottospazio" non è vera. Infatti: fissato nel piano un punto O e considerate due rette distinte passanti per O ed indicati con X e Y gli insiemi dei vettori di $\mathcal{V}_0^2$ che stanno sull'una e sull'altra retta, si ha che $X \cup Y$ non è un sottospazio di $\mathcal{V}_o^2$; infatti: se $\underline{x} \in X$ e $\underline{y} \in Y$ sono diversi da $\underline{0}$, allora $\underline{x}, \underline{y} \in X \cup Y$ ma $\underline{x} + \underline{y} \notin X \cup Y$. Si lascia al lettore di tradurre questo esempio in $\mathbb{R}^2$.