III e IV settimana - eserczi

(1) Si provi che il prodotto di scalari per ennuple in $\mathbb{R}^n$ (definito componente per componente) e il prodotto di scalari per scalari soddisfano l'identità
$$(\lambda\mu)\underline{a} = \lambda(\mu\underline{a})$$

(2) Si provi che il prodotto di scalari per funzioni in $F(\mathbb{R})$ e la somma di funzioni in $F(R)$ (definiti punto per punto) soddisfano l'identità
$$\lambda(f+g) = \lambda f + \lambda g$$

(3) Si mostrino tutti i passaggi che portano alla seguente identità negli spazi vettoriali
$$\alpha\underline{a} + \beta\underline{b} + 2(\gamma\underline{a} + \delta\underline{b}) = (\alpha + 2\gamma)\underline{a} + (\beta + 2\delta)\underline{b}.$$

(4) È vero che in ogni spazio vettoriale V ciascuna equazione nella incognita $\underline{a} \in V$
$$\alpha\underline{a} = \underline{b}, \quad \text{con } \alpha \neq 0$$
ha una ed una sola soluzione?

(5) È vero che in ogni spazio vettoriale V ciascuna equazione nella incognita $\alpha \in \mathbb{R}$
$$\alpha\underline{a} = \underline{b}, \quad \text{con } \underline{a} \neq \underline{0}$$
ha al più una soluzione? È vero che ha almeno una soluzione?

(6) È dato il sottinsieme di $\mathbb{R}^3$
$$\begin{aligned} Z &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x - y - z = 0\} \\ &= \{(y+z, y, z) : \ y, z \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$
Si provi che Z è un sottospazio di $\mathbb{R}^3$, usando solo la definizione di sottospazio di uno spazio vettoriale. Lo si faccia in due modi, usando prima una presentazione di Z e poi l'altra.

(7) Per ciascuno dei seguenti sottinsiemi di $\mathbb{R}^2$, si stabilisca se è un sottospazio di $\mathbb{R}^2$
$$\begin{aligned} S &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 9x^2 = 8y^3\}; \\ T &= \{(2t+3, t); \ t \in \mathbb{R}\}; \\ U &= \{(2t+3, 0); \ t \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

(8) Per ciascuno dei seguenti sottinsiemi di $\mathbb{R}^2$, si stabilisca quali delle tre proprietà definitorie dei sottospazi possiede.
$$\begin{aligned} U &= \{(0, t^2); \ t \in \mathbb{R}\}; \\ W &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; \ x^2 = y^2\} \end{aligned}$$