Lezione del 21.03.

Si è considerato il problema di descrivere il più piccolo sottospazio che contiene dei dati vettori. Dopo avere considerato il caso di uno o due vettori in $\mathbb{R}^2$, si è introdotta la nozione di "combinazione lineare" e si è enunciato e provato che il più piccolo sottospazio che contiene dei dati vettori è l'insieme delle loro combinazini lineari; tale sottospazio si dice "sottospazio generato" dai dati vettori. Si è considerato il sottospazio generato da due vettori nello spazio. Si è osservato che l'azione di aggiungere un nuovo vettore a dei dati vettori lascia invariato il sottospazio generato esattamente quando il nuovo vettore è combinazione lineare dei vettori dati. Infine si è data la nozione di vettori generatori di uno spazio vettoriale e si sono dati degli esempi di generatori ovvi nel caso degli spazi vettoriali $\mathcal{V}_o^2, \mathcal{V}_o^3, \mathbb{R}^n$; in particolare, si sono presentati i vettori canonici di $\mathbb{R}^n$.

Di seguito si riportano gli argomenti un poco più nel dettaglio.

Riferimento: Cap.3 "Combinazini lineari e lineare indipendenza", Par.3.1 "Cobinazioni lineari e generatori".

**Posizione del problema. Un paio di esempi.**

Problema. Dati dei vettori in uno spazio vettoriale, descrivere il più piccolo sottospazio che li contiene. Consideriamo un paio di esempi nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^2$ (identificato, mediante un sistema di riferimento, con lo spazio vettoriale $\mathcal{V}_o^2$ dei vettori del piano applicati in un punto O).

(1) Consideriamo il vettore $\underline{v} = (2, 1)$ in $\mathbb{R}^2$. Osserviamo che:

- ogni sottospazio di $\mathbb{R}^2$ che contiene $\underline{v}$ deve contenere anche ciascun vettore $\lambda\underline{v}$, con $\lambda \in \mathbb{R}$; questi vettori si dicono "multipli scalari" di $\underline{v}$;

- l'insieme $\{\lambda\underline{v};\ \lambda \in \mathbb{R}\}$ dei multipli scalari di $\underline{v}$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^2$ che contiene $\underline{v}$; infatti: questo insieme è chiuso rispetto alla somma (lo si verifichi), è chiuso rispetto al prodotto per scalari (lo si verifichi), e contiene $\underline{v}$ in quanto $1\underline{v} = \underline{v}$.

Dunque, il più piccolo sottospazio di $\mathbb{R}^2$ che contiene $\underline{v} = (2, 1)$ è l'insieme dei multipli scalari di $\underline{v}$

$$\{\lambda\underline{v};\ \lambda \in \mathbb{R}\} = \{(2\lambda, \lambda);\ \lambda \in \mathbb{R}\},$$

che viene identificato col sottospazio di $\mathcal{V}_o^2$ costituito dai vettori che stanno sulla retta passante per O individuata da $\underline{v}$.

Osservazione. Il più piccolo sottospazio di $\mathbb{R}^2$ che contiene un dato vettore è sempre l'insieme dei vettori di una retta che passa per O, a meno che il vettore sia il vettore nullo; in questo caso il sottospazio si riduce al solo vettore nullo.

(2) Consideriamo i vettori $\underline{u} = (1, 3)$ e $\underline{u} = (2, 1)$ in $\mathbb{R}^2$. Osserviamo che:

- ogni sottospazio di $\mathbb{R}^2$ che contiene i due vettori $\underline{u}$ e $\underline{v}$ deve contenere anche ciascun vettore $\alpha\underline{u} + \beta\underline{v}$ ottenuto come somma di un multiplo scalare di $\underline{u}$ e di uno di $\underline{v}$; questi vettori si dicono "combinazioni lineari" di $\underline{u}$ e $\underline{v}$;

- ogni vettore di $\mathbb{R}^2$ si può ottenere come combinazione lineare di $\underline{u}$ e $\underline{v}$; in altri termini: per ogni $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ l'equazione nelle incognite $\alpha, \beta$

$$\alpha(1, 3) + \beta(2, 1) = (a, b)$$

ha almeno una soluzione; infatti: questa equazione equivale al sistema di due equazioni in $\alpha, \beta$ che ha matrice completa

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & a \\ 3 & 1 & b \end{array}\right)$$

che equivale al sistema che ha matrice completa

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & a \\ 0 & -5 & b-3a \end{array}\right)$$

che ha sempre soluzione (una ed una sola).

Dunque, il più piccolo sottospazio di $\mathbb{R}^2$ che contiene $\underline{u} = (1,3)$ e $\underline{v} = (2,1)$ è $\mathbb{R}^2$.

Osservazione: il più piccolo sottospazio di $\mathbb{R}^2$ che contiene due dati vettori è sempre $\mathbb{R}^2$, a meno che i due vettori stiano su una stessa retta per O.

**Combinazioni lineari; sottospazio generato da dati vettori**

Definizione. Siano $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ vettori di uno spazio vettoriale $V$ e siano $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ scalari in $\mathbb{R}$. Il vettore

$$\lambda_1\underline{v}_1 + \cdots + \lambda_n\underline{v}_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\underline{v}_i$$

si dice "combinazione lineare" di $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ con "coefficienti" $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

Descrizione esplicita dell'espressione "il più piccolo sottospazio che contiene ...". Siano $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ dei dati vettori di uno spazio vettoriale $V$. Con l'espressione "il più piccolo sottospazio di $V$ che contiene $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$" si intende il sottospazio di $V$ caratterizzato dalle seguenti condizioni: (1) contiene i vettori $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$; (2) è contenuto in ogni sottospazio di $V$ che contiene $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$.

Proposizione. L'insieme delle combinazioni lineari di dati vettori $\underline{v}_i$ $(i = 1, \dots, n)$ di uno spazio vettoriale $V$

$$(*) = \{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\underline{v}_i;\ \alpha_i \in \mathbb{R}\}$$

è il più più piccolo sottospazio di $V$ che contiene i vettori $\underline{v}_i$ $(i = 1, \dots, n)$.

Dimostrazione. (0) L'insieme $(*)$ è un sottospazio di $V$. Infatti è ovviamente non vuoto e:

- la somma di due qualsiasi combinazioni lineari dei vettori $\underline{v}_i$ è ancora una combinazione lineare dei vettori $\underline{v}_i$ :

$$\begin{aligned} &\alpha_1\underline{v}_1 + \alpha_2\underline{v}_2 + \cdots + \alpha_n\underline{v}_n + \beta_1\underline{v}_1 + \beta_2\underline{v}_2 + \cdots + \beta_n\underline{v}_n \\ &\qquad = (\alpha_1+\beta_1)\underline{v}_1 + (\alpha_2+\beta_2)\underline{v}_2 + \cdots + (\alpha_n+\beta_n)\underline{v}_n \end{aligned}$$

- il prodotto di un qualsiasi scalare per una qualsiasi combinazione lineare dei vettori $\underline{v}_i$ è ancora una combinazione lineare dei vettori $\underline{v}_i$ :

$$\lambda(\alpha_1\underline{v}_1 + \alpha_2\underline{v}_2 + \cdots + \alpha_n\underline{v}_n) = (\lambda\alpha_1)\underline{v}_1 + (\lambda\alpha_2)\underline{v}_2 + \cdots + (\lambda\alpha_n)\underline{v}_n$$

(1) L'insieme $(*)$ contiene ciascno dei vettori $\underline{v}_i$ $(i = 1, \dots, n)$; infatti:

$$0\underline{v}_1 + \cdots + 0\underline{v}_{i-1} + 1\underline{v}_i + 0\underline{v}_{i+1} + \cdots + 0\underline{v}_n = \underline{v}_i$$

(2) Ogni sottospazio che contiene i vettori $\underline{v}_i$ contiene anche tutte le combinazioni lineari dei vettori $\underline{v}_i$; infatti: se $Z$ è un sottospazio di $V$ che contiene $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n$, allora per ogni scalari $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ si ha che $Z$ contiene anche i vettori $\alpha_1\underline{v}_1$, $\alpha_2\underline{v}_2$, $\dots$, $\alpha_n\underline{v}_n$ e duunque $Z$ contiene anche $\alpha_1\underline{v}_1 + \alpha_2\underline{v}_2 + \cdots + \alpha_n\underline{v}_n$.

Definizione. L'insieme delle combinazioni lineari di dati vettori $\underline{v}_i$ $(i = 1, \dots, n)$ di uno spazio vettoriale $V$ si dice "sottospazio di $V$ generato dai vettori $\underline{v}_i$ $(i = 1, \dots, n)$ e si indica con $\langle \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n \rangle$. In simboli:

$$\langle \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n \rangle = \{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \underline{v}_i ;\ \alpha_i \in \mathbb{R} \}$$

Problema. In $\mathbb{R}^3$ siano dati i vettori $\underline{u} = (1, -1, 0)$, $\underline{v} = (1, 2, -3)$, $\underline{w} = (1, 1, 1)$.

(1) $\underline{w}$ appartiene al sottospazio $\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle$ generato da $\underline{u}, \underline{v}$? (2) quali condizioni devono soddisfare le componenti di un vettore di $\mathbb{R}^3$ affinch è il vettore stia in $\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle$?

Risoluzione.

(1) $\underline{w} \in \langle \underline{u}, \underline{v} \rangle$ se e solo se esistono $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tali che

$$\alpha(1, -1, 0) + \beta(1, 2, -3) = (1, 1, 1)$$

cioè se e solo se il sistema in $\alpha, \beta$ che ha matrice completa

$$\left( \begin{array}{rr|r} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \end{array} \right)$$

ha qualche soluzione; questo sistema equivale al sistema con matrice completa

$$\left( \begin{array}{lr|l} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & 1 \end{array} \right)$$

... che non ha soluzioni. Dunque $\underline{w} \notin \langle \underline{u}, \underline{v} \rangle$.

(2) Sia $\underline{z} = (a, b, c)$ un qualsiasi vettore di $\mathbb{R}^3$. $\underline{z} \in \langle \underline{u}, \underline{v} \rangle$ se e solo se esistono $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tali che

$$\alpha(1, -1, 0) + \beta(1, 2, -3) = (a, b, c)$$

cioè se e solo se il sistema in $\alpha, \beta$, dipendente dai parametri $a, b, c$, che ha matrice completa

$$\left( \begin{array}{rr|l} 1 & 1 & a \\ -1 & 2 & b \\ 0 & -3 & c \end{array} \right)$$

ha qualche soluzione; questo sistema equivale al sistema con matrice completa

$$\left( \begin{array}{ll|l} 1 & 1 & a \\ 0 & 3 & b + a \\ 0 & 0 & c + b + a \end{array} \right)$$

che ha soluzioni se e solo se $a + b + c = 0$. Osservazione: $\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle$ è l'insieme delle soluzioni dell'equazione lineare omogenea

$$x + y + z = 0.$$

Sia fissato nello spazio un sistema di riferimento con origine in un punto O e tramite di esso lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ sia identificato con lo spazio vettoriale $\mathcal{V}_o^3$. Allora il sottospazio $\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle$ di $\mathbb{R}^3$ viene identificato col sottospazio dei vettori di $\mathcal{V}_o^3$ che stanno sul piano individuato dai vettori $\underline{u} e \underline{v}$. Il vettore $\underline{w}$ non sta sul piano.

**Relazione fra sottospazi generati**

Qui di seguito sia $V$ uno spazio vettoriale.

Osservazione. Il sottospazio generato da dati vettori di $V$ è contenuto nel sottospazio generato dai dati vettori e da un ulteriore vettore; in simboli:

$$\langle \underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n \rangle \subseteq \langle \underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n, \underline{w} \rangle \qquad \forall \ldots$$

Questa affermazione molto naturale può essere provata osservando che ogni combinazione lineare di $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n$ può essere riscritta come una combinazione lineare di $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n, \underline{w}$ nella quale il coefficiente di $\underline{w}$ è nullo:

$$\alpha_1 \underline{v}_1 + \cdots + \alpha_n \underline{v}_n = \alpha_1 \underline{v}_1 + \cdots + \alpha_n \underline{v}_n + 0 \underline{w}$$

Proposizione. Il sottospazio generato da dei dati vettori di $V$ è uguale al sottospazio generato dai dati vettori e da un ulteriore vettore se e solo se l'ulteriore vettore è combinazione lineare dei vettori dati. In simboli:

$$\langle \underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n \rangle = \langle \underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n, \underline{w} \rangle \quad \text{se e solo se} \quad \underline{w} \in \langle \underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n \rangle$$

Dimostrazione.

L'affermazione "se $\langle \underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n \rangle = \langle \underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n, \underline{w} \rangle$, allora $\underline{w} \in \langle \underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n \rangle$ " deriva direttamente dal fatto che $\underline{w} \in \langle \underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n, \underline{w} \rangle$.

L'affermazione "se $\underline{w} \in \langle \underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n \rangle$, allora $\langle \underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n \rangle = \langle \underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n, \underline{w} \rangle$ " si può provare come segue. Se $\underline{w}$ si può scrivere come $\underline{w} = \gamma_1 \underline{v}_1 + \cdots + \gamma_n \underline{v}_n$ allora ogni combinazione lineare $\alpha_1 \underline{v}_1 + \cdots + \alpha_n \underline{v}_n + \beta \underline{w}$ di $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n, \underline{w}$ si può riscrivere come

$$\alpha_1 \underline{v}_1 + \cdots + \alpha_n \underline{v}_n + \beta(\gamma_1 \underline{v}_1 + \cdots + \gamma_n \underline{v}_n) = (\alpha_1 + \beta\gamma_1)\underline{v}_1 + \cdots + (\alpha_n + \beta\gamma_n)\underline{v}_n$$

cioè come una combinazione lineare di $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n$.

**Generatori di uno spazio vettoriale**

Definizione. Sia $V$ uno spazio vettoriale. Si dice che dei vettori di $V$ "generano" $V$ se il sottospazio da essi generato è $V$ stesso. In simboli: si dice che $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n \in V$ generano $V$ se

$$\langle \underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n \rangle = V.$$

Esempi ovvi.

- Dei vettori generano $\mathbb{R}^2$ (identificato con $\mathcal{V}_o^2$) se e solo se fra di essi ve ne sono almeno due non allineati.

- Dei vettori generano $\mathbb{R}^3$ (identificato con $\mathcal{V}_o^3$) se e solo se fra di essi ve ne sono almeno tre non complanari.

- Ciascun vettore di $\mathbb{R}^2$ si può scrivere come

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = a(1, 0) + b(0, 1).$$

Dunque i vettori $(1,0)$, $(0,1)$ generano $\mathbb{R}^2$. Questi vettori, con l'aggiunta di eventuali altri vettori, generano ancora $\mathbb{R}^2$.

- I vettori di $\mathbb{R}^n$ che hanno una componente uguale a 1 e tutte le altre uguali a 0

$$\underline{e}_1 = (1,0,\ldots,0), \quad \underline{e}_2 = (0,1,\ldots,0), \quad \ldots, \quad \underline{e}_n = (0,0,\ldots,1)$$

si dicono "vettori canonici" di $\mathbb{R}^n$. Ciascun vettore di $\mathbb{R}^n$ si può scrivere come

$$\begin{aligned} \underline{a} &= (a_1, a_2, \ldots, a_n) \\ &= a_1(1,0,\ldots,0) + a_2(0,1,\ldots,0) + \cdots + a_n(0,0,\ldots,1) \\ &= a_1\underline{e}_1 + a_2\underline{e}_2 + \cdots + a_n\underline{e}_n \end{aligned}$$

cioè come la combinazione lineare dei vettori canonici con coefficienti le componenti del vettore.

Dunque i vettori canonici $\underline{e}_i$ $(i = 1,\ldots,n)$ generano $\mathbb{R}^n$. Questi vettori, con l'aggiunta di eventuali altri vettori, generano ancora $\mathbb{R}^n$.