

## Lezione del 27.03 - II parte

In questa parte si è introdotto lo spazio vettoriale  $\mathbb{R}[x]$  dei polinomi a coefficienti reali in una variabile  $x$ , ed i suoi sottospazi notevoli  $\mathbb{R}_n[x]$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) costituiti dai polinomi nulli e dai polinomi di grado minore o uguale ad  $n$ , con relative basi canoniche; si è inoltre osservato che  $\mathbb{R}[x]$  non è finitamente generato.

**Spazio vettoriale dei polinomi.** Formalmente, un *polinomio* a coefficienti reali nella variabile  $x$  è una scrittura della forma

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

dove  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$  sono numeri reali, detti *coefficienti* del polinomio, e  $n$  è un numero naturale;  $a_0, a_1x, \dots, a_nx^n$  sono detti *termini* del polinomio, e due scritture si ritengono uguali se differiscono per termini con coefficienti nulli. Due polinomi qualsiasi possono dunque essere dati da due scritture della forma

$$p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n, \quad q(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_nx^n$$

(eventualmente aggiungendo termini nulli); la somma dei due polinomi per definizione è data dalla scrittura

$$p(x) + q(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + \dots + (a_n + b_n)x^n;$$

e il prodotto di uno scalare  $\alpha \in \mathbb{R}$  per un polinomio è dato da

$$\alpha p(x) = (\alpha a_0) + (\alpha a_1)x + (\alpha a_2)x^2 + \dots + (\alpha a_n)x^n$$

L'insieme dei polinomi a coefficienti reali nella variabile  $x$  si indica con  $\mathbb{R}[x]$ ; questo insieme con le operazioni sopra definite risulta essere uno spazio vettoriale; il vettore nullo è dato dalla scrittura  $0$  o equivalentemente dalla  $0 + 0x$  o ...

Dato un polinomio  $p(x)$ , a ciascun numero reale  $r$  resta associato il un numero reale  $p(r)$  ottenuto valutando l'espressione  $p(x)$  in  $x = r$ , e si ha una funzione  $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $r \mapsto p(r)$ . Si dice che  $p$  è la *funzione polinomiale* associata al polinomio  $p(x)$ . Chiaramente, a due polinomi uguali corrispondono funzioni polinomiali uguali. Viceversa, si prova che se a due polinomi corrisponde la stessa funzione polinomiale allora i due polinomi devono essere uguali; questo enunciato viene detto il *principio di identità* dei polinomi. Dunque, si possono riguardare i polinomi a coefficienti reali in una variabile equivalentemente come scritture algebriche formali e come funzioni reali di una variabile reale. Inoltre, questa identificazione è compatibile con le operazioni di somma e prodotto per scalari definite sulle scritture formali e sulle funzioni.

Un polinomio del tipo  $p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$  con  $a_n \neq 0$  si dice polinomio di *grado*  $n$ ; per il polinomio nullo non si definisce il grado. Si verifica che:

- il grado di  $p(x) + q(x)$ , qualora sia definito, è minore od uguale al massimo fra il grado di  $p(x)$  e il grado di  $q(x)$ ;
- il grado di  $\alpha p(x)$  è uguale al grado di  $p(x)$  se  $\alpha \neq 0$  e  $p(x) \neq 0$ .

Da queste proprietà segue che per ciascun numero naturale  $n$  fissato, l'insieme  $\mathbb{R}_n[x]$  costituito dal polinomio nullo e dai polinomi di grado minore od uguale ad  $n$  costituisce un sottospazio vettoriale di  $\mathbb{R}[x]$ . In particolare si hanno:

- il sottospazio dei polinomi costanti  $\mathbb{R}_0[x] = \{a \mid a \in \mathbb{R}\}$  che coincide col sottospazio  $\langle 1 \rangle$  generato dal polinomio 1;
- il sottospazio  $\mathbb{R}_1[x] = \{a + bx \mid a, b \in \mathbb{R}\}$  che coincide col sottospazio  $\langle 1, x \rangle$  generato dai polinomi  $1, x$ ;
- il sottospazio  $\mathbb{R}_2[x] = \{a + bx + cx^2 \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$  che coincide col sottospazio  $\langle 1, x, x^2 \rangle$  generato dai polinomi  $1, x, x^2$ .

$\mathbb{R}[x]$  non è finitamente generato. Ciò deriva dal fatto che per ciascuna sequenza finita di polinomi non nulli  $p_1(x), \dots, p_r(x)$  indicati con  $n_1, \dots, n_r$  i rispettivi gradi, e indicato con  $n$  il loro massimo, si ha che  $p_1(x), \dots, p_r(x) \in \mathbb{R}_n[x]$ ; dunque  $\langle p_1(x), \dots, p_r(x) \rangle \subseteq \mathbb{R}_n[x]$  che a sua volta è contenuto propriamente in  $\mathbb{R}[x]$ .

Per ciascun intero  $n$  fissato, i polinomi  $1, x, x^2, \dots, x^n$  sono linearmente indipendenti; infatti, l'uguaglianza  $a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n = 0$ , per la definizione di uguaglianza fra polinomi, vale solo se  $a_0 = a_1 = \dots = a_n = 0$ . Dunque l'insieme  $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$  è una base del sottospazio  $\mathbb{R}_n[x]$ .