

Lezione del 27.03.

La lezione si è svolta per la maggior parte sull'indipendenza lineare di vettori, con una parte finale sugli spazi vettoriali di polinomi. La prima parte viene riportata di seguito, la seconda verrà riportata in un altro file.

Si è presentata la proprietà di indipendenza lineare per una sequenza di vettori: si è data una introduzione a partire dalle configurazioni di vettori nel piano e nello spazio, si è data la definizione per vettori di uno spazio vettoriale qualsiasi, si sono considerati i casi di uno, due e tre vettori, in generale e in esempi, e si sono enunciate e provate un paio di proposizioni. Il riferimento per questa parte è

Cap. 3 "Combinazioni lineari e lineare indipendenza" Par.3.2 "Indipendenza lineare"

Il discorso è stato svolto con un taglio un po' diverso da quello del testo. Lo si riporta per esteso di seguito.

Indipendenza lineare

Introduzione alla definizione. Le configurazioni di due vettori applicati in un punto O del piano o dello spazio possono essere classificate nel modo seguente: (1) due vettori non allineati (in particolare ciascuno dei due non nullo); (2) due vettori non nulli allineati; (3) un vettore non nullo ed uno nullo; (4) due vettori nulli. Quando pensiamo ad una configurazione di due vettori di regola pensiamo ad una configurazione del tipo (1), a due vettori non allineati. Questo tipo di configurazione può essere distinto dagli altri tipi nei termini dell'algebra dei vettori, nel modo seguente.

(1) Siano $\underline{a}, \underline{b}$ due vettori non allineati. Per ogni α, β scalari, consideriamo la combinazione lineare $\alpha\underline{a} + \beta\underline{b}$ e ci chiediamo per quali α, β vale l'uguaglianza

$$\alpha\underline{a} + \beta\underline{b} = \underline{0}.$$

Chiaramente $\alpha = 0$ e $\beta = 0$ rendono vera l'uguaglianza. In realtà SOLO $\alpha = 0$ e $\beta = 0$ rendono vera l'uguaglianza. Infatti:

$$\begin{aligned} \alpha\underline{a} + \beta\underline{b} = \underline{0} & \text{ equivale a } \alpha\underline{a} = -\beta\underline{b} \\ & \text{ implica } \alpha\underline{a} = \underline{0} = -\beta\underline{b} \\ & \text{ implica } \alpha = 0 = \beta \end{aligned}$$

(l'equivalenza è ovvia; motivazione della prima implicazione: il vettore $\alpha\underline{a} = -\beta\underline{b}$ sta sia sulla retta generata da \underline{a} che sulla retta generata da \underline{b} , e nel caso in esame questo vettore deve essere $\underline{0}$; motivazione della seconda implicazione: lasciata al lettore).

(2) Siano $\underline{a}, \underline{b}$ due vettori non nulli allineati. Allora esiste uno scalare α tale che valga l'uguaglianza $\underline{b} = \alpha\underline{a}$. Questa uguaglianza equivale alla $\alpha\underline{a} + (-1)\underline{b} = \underline{0}$.

(3) Siano \underline{a} nullo e \underline{b} non nullo. Allora per ogni scalare α vale l'uguaglianza $\alpha\underline{a} + 0\underline{b} = \underline{0}$.

(4) Siano \underline{a} e \underline{b} nulli. Allora per ogni α e β vale l'uguaglianza $\alpha\underline{a} + \beta\underline{b} = \underline{0}$.

Riassumendo: nelle configurazioni del tipo (1) l'uguaglianza $\alpha\underline{a} + \beta\underline{b} = \underline{0}$ è soddisfatta solo per $\alpha = \beta = 0$; nelle configurazioni degli altri tipi esistono degli scalari $\bar{\alpha}$ e $\bar{\beta}$ non entrambi nulli tali che $\bar{\alpha}\underline{a} + \bar{\beta}\underline{b} = \underline{0}$.

Quando pensiamo ad una configurazione di tre vettori applicati in un punto O dello spazio di regola pensiamo a tre vettori non complanari. Questo tipo di configurazione può essere distinto dagli altri tipi nei termini dell'algebra dei vettori, nel modo seguente. Siano $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ vettori applicati in O . Se i tre vettori non sono complanari allora l'uguaglianza

$$\alpha \underline{a} + \beta \underline{b} + \gamma \underline{c} = \underline{0}$$

è soddisfatta solo per $\alpha = \beta = \gamma = 0$; altrimenti esistono degli scalari $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}$ non tutti nulli tali che

$$\bar{\alpha} \underline{a} + \bar{\beta} \underline{b} + \bar{\gamma} \underline{c} = \underline{0}.$$

Definizione. Sia V uno spazio vettoriale e siano $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n \in V$. Si hanno due casi:

(1) l'uguaglianza

$$\lambda_1 \underline{v}_1 + \dots + \lambda_n \underline{v}_n = \underline{0}$$

vale solo per $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$;

(2) esistono $\bar{\lambda}_1, \dots, \bar{\lambda}_n$ non tutti nulli tali che

$$\bar{\lambda}_1 \underline{v}_1 + \dots + \bar{\lambda}_n \underline{v}_n = \underline{0};$$

Nel primo caso si dice che i vettori $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ sono "linearmente indipendenti"; nel secondo caso si dice che i vettori $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ sono "linearmente dipendenti".

In altri termini la definizione può essere espressa come segue. Si consideri l'equazione nelle n incognite $\lambda_1, \dots, \lambda_n$

$$\lambda_1 \underline{v}_1 + \dots + \lambda_n \underline{v}_n = \underline{0};$$

se l'equazione ha solo la soluzione $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$, si dice che $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ sono linearmente indipendenti, mentre se l'equazione ha qualche altra soluzione, si dice che $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ sono linearmente dipendenti.

Nota. La proprietà di essere linearmente indipendenti o dipendenti non si riferisce ai singoli vettori, ma al complesso dei vettori.

Esempi.

- In \mathbb{R}^2 . Il vettore $(1, 2)$ è linearmente indipendente, mentre $(0, 0)$ è linearmente dipendente (si lascia la verifica al lettore).

- In \mathbb{R}^2 . I vettori $(1, 0), (0, 1)$ sono linearmente indipendenti. Infatti l'uguaglianza

$$\alpha(1, 0) + \beta(0, 1) = (0, 0)$$

equivale alla $(\alpha, \beta) = (0, 0)$ che equivale a $\alpha = \beta = 0$.

- In \mathbb{R}^2 . I vettori $(1, 0), (0, 1), (2, 3)$ sono linearmente dipendenti. Infatti si ha l'uguaglianza

$$(2, 3) = 2(1, 0) + 3(0, 1),$$

che equivale alla

$$2(1, 0) + 3(0, 1) + (-1)(2, 3) = (0, 0).$$

-In \mathbb{R}^2 . I vettori $(1, 0), (2, 3), (4, 5)$ sono linearmente dipendenti. Infatti l'equazione in α, β, γ

$$\alpha(1, 0) + \beta(2, 3) + \gamma(4, 5) = (0, 0)$$

equivale al sistema di due equazioni in α, β, γ

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta + 4\gamma = 0 \\ 3\beta + 5\gamma = 0 \end{cases}$$

che ha ∞^1 soluzioni, e dunque certamente qualche soluzione diversa da $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

- In \mathbb{R}^3 . I vettori $(1, 2, 4), (\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1)$ sono linearmente dipendenti. Infatti vale l'uguaglianza

$$(1, 2, 4) = 4\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1\right),$$

che equivale alla

$$1(1, 2, 4) + (-4)\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1\right) = (0, 0, 0).$$

Uno o due vettori, in generale. In questa parte sia V un qualsiasi spazio vettoriale.

Ciascun vettore $\underline{v} \neq \underline{0}$ in V è linearmente indipendente, mentre $\underline{0}$ è linearmente dipendente (si lascia la verifica al lettore).

Per ciascun vettore $\underline{v} \in V$, i vettori $\underline{0}, \underline{v}$ sono linearmente dipendenti. Infatti si ha l'uguaglianza $1\underline{0} + 0\underline{v} = \underline{0}$. Più in generale, si ha la seguente proposizione sul comportamento delle proprietà di dipendenza/indipendenza lineare rispetto alle operazioni di aggiungere/togliere un vettore.

Proposizione. Siano $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n, \underline{v} \in V$. (1) Se $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ sono linearmente dipendenti, allora anche $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n, \underline{v}$ sono linearmente dipendenti. (2) Se $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n, \underline{v}$ sono linearmente indipendenti, allora anche $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ sono linearmente indipendenti.

Dimostrazione. La (1) e la (2) sono equivalenti. Proviamo la (1). Se vale l'ipotesi, allora: esistono n scalari $\bar{\lambda}_1, \dots, \bar{\lambda}_n$ non tutti nulli tali che $\bar{\lambda}_1\underline{v}_1 + \dots + \bar{\lambda}_n\underline{v}_n = \underline{0}$. Dunque: per gli $n+1$ scalari $\bar{\lambda}_1, \dots, \bar{\lambda}_n, 0$, che non sono tutti nulli, si ha $\bar{\lambda}_1\underline{v}_1 + \dots + \bar{\lambda}_n\underline{v}_n + 0\underline{v} = \underline{0}$, cioè vale la tesi.

Per due vettori non nulli si ha

Proposizione. Le seguenti affermazioni su due vettori $\underline{u}, \underline{v} \neq \underline{0}$ in V sono equivalenti

- (1) $\underline{u}, \underline{v}$ sono linearmente dipendenti;
- (2) $\underline{u} = \beta\underline{v}$, per qualche $\beta \neq 0$;
- (3) $\underline{v} = \alpha\underline{u}$, per qualche $\alpha \neq 0$.

Dimostrazione.

(2) implica (1) in quanto $\underline{u} = \beta\underline{v}$ implica $1\underline{u} + (-\beta)\underline{v} = \underline{0}$. (3) implica (1): analogamente.

(1) implica (2) e (3). Supponiamo che esistano $\bar{\lambda}, \bar{\mu}$ non entrambi nulli tali che $\bar{\lambda}\underline{u} + \bar{\mu}\underline{v} = \underline{0}$; osserviamo che se fosse $\bar{\lambda} = 0$ e $\bar{\mu} \neq 0$ allora si avrebbe $\underline{v} = \underline{0}$ contro l'ipotesi; analogamente se fosse $\bar{\lambda} \neq 0$ e $\bar{\mu} = 0$ allora si avrebbe $\underline{u} = \underline{0}$ contro l'ipotesi; dunque $\bar{\lambda}$ e $\bar{\mu}$ devono essere entrambi non nulli; dalla

$$\bar{\lambda}\underline{u} + \bar{\mu}\underline{v} = \underline{0}$$

ricaviamo $\underline{u} = -\bar{\lambda}^{-1}\bar{\mu}\underline{v}$ e $\underline{v} = -\bar{\mu}^{-1}\bar{\lambda}\underline{u}$.

Definizione. Due vettori non nulli si dicono "proporzionali" se soddisfano una delle condizioni (1), (2), (3) di sopra.

Esercizi

(1) In \mathbb{R}^3 . Stabilire se $(1, 1, 1)$, $(1, 2, 4)$, $(1, 3, 9)$ sono linearmente indipendenti.

Svolgimento. L'equazione nelle incognite α, β, γ

$$\alpha(1, 1, 1) + \beta(1, 2, 4) + \gamma(1, 3, 9) = (0, 0, 0)$$

è equivalente al sistema lineare omogeneo di tre equazioni in α, β, γ che ha matrice completa

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 9 & 0 \end{array} \right)$$

che è equivalente a quello che matrice completa

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array} \right)$$

che ha una sola soluzione, $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Dunque i tre vettori dati sono linearmente indipendenti. Geometricamente, sono rappresentati da tre vettori non complanari.

(2) In \mathbb{R}^3 . Stabilire se $(1, 2, 3)$, $(1, 3, 5)$, $(1, 4, 7)$ sono linearmente indipendenti.

Svolgimento. L'equazione nelle incognite α, β, γ

$$\alpha(1, 2, 3) + \beta(1, 3, 5) + \gamma(1, 4, 7) = (0, 0, 0)$$

è equivalente al sistema lineare omogeneo di tre equazioni in α, β, γ che ha matrice completa

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 \\ 3 & 5 & 7 & 0 \end{array} \right)$$

che è equivalente a quello che matrice completa

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

che ha ∞^1 soluzioni. Dunque i tre vettori dati sono linearmente dipendenti. Geometricamente, sono rappresentati da tre vettori complanari.

La soluzione generale è data da $(\gamma, -2\gamma, \gamma)$, con γ variabile libera in \mathbb{R} ; in particolare si ha la soluzione $(1, -2, 1)$. Dunque si ha

$$\underline{a} - 2\underline{b} + \underline{c} = \underline{0};$$

da questa relazione si può ricavare

$$\underline{c} = -\underline{a} + 2\underline{b};$$

questa relazione può essere usata per rappresentare graficamente \underline{c} in funzione di \underline{a} e \underline{b} .

Proposizione generale.

Proposizione. Le seguenti affermazioni su n vettori $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ di uno spazio vettoriale V sono equivalenti.

(1) $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ sono linearmente dipendenti;

(2) esiste almeno un vettore \underline{v}_i che è combinazione lineare degli altri.

Nota. La proposizione non afferma che ciascun \underline{v}_i è combinazione lineare degli altri. In effetti questa affermazione è falsa, come mostrato dal seguente esempio. I vettori $(0,0)$, $(1,0)$ sono linearmente dipendenti; $(0,0)$ è un multiplo scalare di $(1,0)$, ma $(1,0)$ non è un multiplo scalare di $(0,0)$.

Dimostrazione.

(2) implica (1). Esiste almeno un vettore \underline{v}_i che è combinazione lineare degli altri, per semplicità supponiamo che

$$\underline{v}_1 = \alpha_2 \underline{v}_2 + \cdots + \alpha_n \underline{v}_n;$$

allora

$$1\underline{v}_1 + (-\alpha_2)\underline{v}_2 + \cdots + (-\alpha_n)\underline{v}_n = \underline{0},$$

cioè $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ sono linearmente dipendenti;

(1) implica (2). Esistono $\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \dots, \bar{\alpha}_n$ non tutti nulli tali che

$$\bar{\alpha}_1 \underline{v}_1 + \bar{\alpha}_2 \underline{v}_2 + \cdots + \bar{\alpha}_n \underline{v}_n = \underline{0},$$

per semplicità supponiamo che $\bar{\alpha}_1 \neq 0$; allora possiamo ricavare

$$\underline{v}_1 = -\bar{\alpha}_1^{-1} \bar{\alpha}_2 \underline{v}_2 - \cdots - \bar{\alpha}_1^{-1} \bar{\alpha}_n \underline{v}_n.$$