Lezione del 28.03.

La lezione è consistita in un approfondimento dei concetti di vettori generatori e di vettori linearmente indipendenti: si è esplicitata la relazione con i sistemi lineari, si è data una versione insiemistica dei concetti, e si è introdotto il concetto di base di uno spazio vettoriale. I riferimenti sono

Cap. 3 "Combinazioni lineari e lineare indipendenza" Par.3.2 "Indipendenza lineare" e Cap.4 "Basi e dimensione" Par.4.1 "Base: defnizione ed esempi" (fino alla definizione di base)

Una buona parte degli argomenti è stata svolta a lezione per esteso mentre nel testo è solo accennata. Di seguito si riportano nel dettaglio tutti gli argomenti svolti.

Equazioni a coefficienti vettoriali e sistemi di equazioni lineari.

Fatto generale. Per ogni $p+1$ vettori in $\mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} \underline{a}_1 &= (a_{11}, a_{21}, \dots, a_{n1}), \\ &\vdots \\ \underline{a}_p &= (a_{1p}, a_{2p}, \dots, a_{np}), \\ \underline{b} &= (b_1, b_2, \dots, b_n), \end{aligned}$$

la ricerca delle combinazioni lineari degli $\underline{a}_i$ che risultano uguali a $\underline{b}$ consiste nella ricerca delle soluzioni dell'equazione nelle incognite scalari $x_1, \dots, x_p$

$$x_1\underline{a}_1 + \cdots + x_p\underline{a}_p = \underline{b},$$

che a sua volta equivale alla ricerca delle soluzioni del sistema delle n equazioni nelle p incognite $x_1, \dots, x_p$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$$

che ha matrice completa

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1p} & b_1 \\ a_{21} & \dots & a_{2p} & b_2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{np} & b_n \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \underline{a}_1 & \dots & \underline{a}_p & \underline{b} \end{array}\right),$$

dove i vettori sono pensati come vettori colonna.

Viceversa, la ricerca delle soluzioni di un sistema lineare di n equazioni a coefficienti scalari in p incognite scalari può essere interpretata come la ricerca delle combinazioni lineari di p vettori in $\mathbb{R}^n$ che risultano uguali ad un dato vettore in $\mathbb{R}^n$. Ad esempio, il sistema di 2 equazioni nelle tre incognite x, y, z

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ \phantom{x + {}} 3y + 4z = 2 \end{cases}$$

equivale alla equazione a coefficienti in $\mathbb{R}^2$ nelle incognite x, y, z

$$x(1,0) + y(2,3) + z(3,4) = (1,2)$$

che può essere interpretata come la ricerca delle combinazioni lineari dei vettori $(1, 0)$, $(2, 3)$, $(3, 4)$ in $\mathbb{R}^2$ che hanno per risultato il vettore $(1, 2)$. Dunque uno può vedere il sistema vettorialmente e in questo caso anche geometricamente.

Vettori generatori. Riprenendo il discorso e le notazioni di sopra, per p dati vettori $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_p$ si ha:

- i vettori $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_p$ generano $\mathbb{R}^n$ se e solo per ogni $\underline{b} \in \mathbb{R}^n$ l'equazione nelle incognite $x_1, \ldots, x_p$

$$x_1\underline{a}_1 + \cdots + x_p\underline{a}_p = \underline{b}$$

ha qualche soluzione, cioè per ogni $\underline{b} \in \mathbb{R}^n$ il sistema di matrice completa

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \underline{a}_1 & \ldots & \underline{a}_p & \underline{b} \end{array} \right)$$

ha qualche soluzione;

- i vettori $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_p$ sono linearmente indipendenti se e solo se l'equazione nelle incognite $x_1, \ldots, x_p$

$$x_1\underline{a}_1 + \cdots + x_p\underline{a}_p = \underline{0}$$

ha solo la soluzione $x_1 = \cdots = x_p = 0$, cioè il sistema di matrice completa

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \underline{a}_1 & \ldots & \underline{a}_p & \underline{0} \end{array} \right)$$

ha solo la soluzione $x_1 = \cdots = x_p = 0$.

Proposizione. Siano dati m vettori $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_m \in \mathbb{R}^n$. Se $m > n$, allora $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_m$ sono linearmente dipendenti.

Dimostrazione. Le soluzioni dell'equazione

$$x_1\underline{a}_1 + \cdots + x_p\underline{a}_m = \underline{0}$$

sono le soluzioni del sistema di matrice completa

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \underline{a}_1 & \ldots & \underline{a}_m & \underline{0} \end{array} \right) = (A|\underline{0});$$

questo sistema ha sempre almeno la soluzione $(0, \ldots, 0)$; inoltre, sotto l'ipotesi $n < m$ si ha $\mathrm{rr}(A) \leq n < m$ dunque il sistema ha infinite soluzioni, che dipendono da almeno $m - n (> 0)$ parametri liberi, dunque in particolare ha una soluzione diversa dalla soluzione $(0, \ldots, 0)$.

Insiemi generatori e insiemi linearmente indipendenti. Abbiamo associato ad ogni lista di vettori il sottospazio costituito da tutte le loro combinazini lineari, il sottospazio generato dalla lista di vettori, ed abbiamo definito per liste di vettori le proprietà di essere generatori e di essere linearmente indipendenti. Questa costruzione e queste proprietà possono essere convenientemente definite per insiemi di vettori, come di seguito precisato. Sia V uno spazio vettoriale.

Osservazione. Per ogni $\underline{a}, \underline{b} \in V$ si ha

$$\begin{aligned}\langle \underline{a}, \underline{b} \rangle &= \{\alpha\underline{a} + \beta\underline{b};\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} \\ &= \{\beta\underline{b} + \alpha\underline{a};\ \beta, \alpha \in \mathbb{R}\} = \langle \underline{b}, \underline{a} \rangle\end{aligned}$$

(per la proprietà commutativa della somma in V). Più in generale, scambiando due vettori in una lista di vettori, il sottospazio generato non cambia. Questo fatto permette di dare la seguente.

Definizione. Sia A un sottinsieme finito di V e siano $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n$ gli elementi di A elencati in un qualche ordine. Si dice " sottospazio generato" dall'insieme A il sottospazio generato dalla lista dei vettori $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n$, e si pone

$$\langle A \rangle = \langle \underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n \rangle.$$

Si dice che A è un "insieme generatore" di V se $\langle A \rangle = V$.

Per convenzione, si dice che il sottospazio generato dall'insieme vuoto è il sottospazio nullo, costituito solo dal vettore $\underline{0}$ e si pone $\langle \emptyset \rangle = \{\underline{0}\}$.

Osservazione. Per ogni $\underline{a}, \underline{b} \in V$ si ha

$$\begin{aligned}(\underline{a}, \underline{b} \text{ lin. indip.}) \quad &\text{se e solo se} \quad (\alpha\underline{a} + \beta\underline{b} = \underline{0} \text{ implica } \alpha = \beta = 0) \\ &\text{se e solo se} \quad (\beta\underline{b} + \alpha\underline{a} = \underline{0} \text{ implica } \beta = \alpha = 0) \\ &\text{se e solo se} \quad (\underline{b}, \underline{a} \text{ lin. indip.})\end{aligned}$$

(per la proprietà commutativa della somma in V). Questo fatto permette di dare la seguente

Definizione. Sia A un sottinsieme finito di V e siano $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n$ gli elementi di A elencati in un qualche ordine, senza ripetizioni. Si dice che l'insieme A è linearmente indipendente (o dipendente) se la lista dei vettori $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n$ è linearmente indipendente (o dipendente). Per convenzione, si dice che l'insieme vuoto è linearmente indipendente.

Queste definizioni e notazioni rendono più agevole il discorso su questi argomenti. Ad esempio si ha la

Proposizione. Per ciascun insieme finito $A \subset V$, esiste un sottinsieme $A' \subseteq A$, tale che A' sia linearmente indipendente e $\langle A' \rangle = \langle A \rangle$.

Dimostrazione. Se A è linearmente indipendente, si prende $A' = A$. Se A è linearmente dipendente, allora esiste un elemento $\underline{a}_1 \in A$ che è combinazione lineare degli altri elementi di A; per quanto visto in precedenza, si ha $\langle A \rangle = \langle A \setminus \underline{a}_1 \rangle$. Se $A \setminus \underline{a}_1$ è linearmente indipendente, si prende $A' = A \setminus \underline{a}_1$. Altrimenti si riapplica il processo al nuovo insime $A \setminus \underline{a}_1$. Essendo A finito, dopo un numero finito di passi si giungerà ad un sottinsieme $A' \subseteq A$ linearmente indipendente tale che $\langle A' \rangle = \langle A \rangle$.

Esempio. In $\mathbb{R}^3$ è dato l'insieme

$$A = \{(1, -1, -1),\ (2, -3, 0),\ (1, 0, -3)\}.$$

Di seguito determiniamo un sottinsieme $A' \subset A$ linearmente indipendente tale che $\langle A' \rangle = \langle A \rangle$ e mostriamo come usare questa informazione per determinare i valori del parametro k tali che il vettore $\underline{b} = (1, 2, k)$ stia in $\langle A \rangle$.

A è linearmente indipendente se e solo se l'equazione in α, β, γ

$$\alpha(1,-1,-1)+\beta(2,-3,0)+\gamma(1,0,-3)=(0,0,0)$$

ha solo la soluzione $\alpha=\beta=\gamma=0$, cioè il sistema lineare di matrice completa

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -3 & 0 \end{array}\right)$$

ha solo la soluzione $\alpha=\beta=\gamma=0$, equivalentemente, il sistema di matrice completa

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

ha solo la soluzione $\alpha=\beta=\gamma=0$; si ha $rr(\text{matr. incompleta})=2=rr(\text{matr. completa})$, quindi questo sistema ha $\infty^{3-2}=\infty^1$ soluzioni, non solo la soluzione $(0,0,0)$. Riassumendo: l'insieme A è linearmente dipendente.

Essendo A linearmente dipendente, si ha che c'è uno dei tre vettori di A che è combinazione lineare degli altri due. Osserviamo che i tre vettori sono a due a due linearmente indipendenti. Dunque viene da pensare che ciascuno dei tre vettori è combinazione lineare degli altri due. L'intuizione è esatta, ma al momento non abbiamo abbastanza teoria per giustificarla. Cerchiamo dunque le soluzioni dell'equazione, cioè quelle del sistema; la soluzione generale è data da $(-3\gamma,\gamma,\gamma)$, $(\gamma\in\mathbb{R};)$ e una particolare soluzione, diversa da $(0,0,0)$ è $(-3,1,1)$; dunque si ha la relazione

$$-3(1,-1,-1)+(2,-3,0)+(1,0,-3)=(0,0,0).$$

Da questa relazione possiamo ricavare ciascuno dei tre vettori come combinazione lneare degli altri due. Possiamo dunque cancellare uno qualsiasi dei tre vettori dall'insieme A lasciando invariato il sottospazio generato. Scegliendo di cancellare il primo, abbiamo

$$\langle A\rangle=\langle(1,0,-3),\ (2,-3,0)\rangle$$

I due vettori rimasti sono linearmente indipendenti, dunque non abbiamo modo di semplificare ulteriormente la descrizione del sottospazio.

Ora, $(1,2,k)\in\langle A\rangle=\langle(1,0,-3),\ (2,-3,0)\rangle$ se e solo se l'equazione

$$\alpha(1,-1,-1)+\beta(2,-3,0)+\gamma(1,0,-3)=(1,2,k)$$

ha qualche soluzione, cioè il sistema di matrice completa

$$\left(\begin{array}{rr|r} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \\ -3 & 0 & k \end{array}\right)$$

ha qualche soluzione, equivalentemente il sistema di matrice

$$\left(\begin{array}{rr|r} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & k+7 \end{array}\right)$$

ha qualche soluzione; ciò capita se e solo se $k+7=0$, cioè $k=-7$.

Sui sottospazi costituiti dalle soluzioni di un'equazione lineare omogenea.

Consideriamo l'insieme S delle soluzioni dell'equazione lineare omogenea

$$x + 2y + 3z = 0$$

nelle incognite x, y, z. Questo insieme è un sottospazio di $\mathbb{R}^3$. Può essere descritto esplicitamente come l'insieme dei vettori del tipo

$$(-2y - 3z, y, z), \quad y, z \in \mathbb{R}.$$

Osserviamo che

$$(-2y - 3z, y, z) = (-2y, y, 0) + (-3z, 0, z) = y(-2, 1, 0) + z(-3, 0, 1)$$

Dunque i vettori $(-2, 1, 0), (-3, 0, 1)$ generano S; osserviamo che sono anche linearmente indipenenti.

Basi

Definizione. Sia V uno spazio vettoriale. Un sottinsieme $A \subset V$, finito, si dice "base" di V se (1) A è linearmente indipendente; (2) A genera V.

Le considerazioni generali che abbiamo fatto e le informazioni che abbbiamo ottenuto negli esempi che abbiamo considerato, possono essere dunque espresse nel modo seguente:

(1) per ogni sottinsieme A finito di uno spazio vettoriale V, esiste un sottinsieme $A' \subseteq A$ che è una base per il sottospazio $\langle A \rangle$ generato di A;

(2) in particolare, il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ generato dall'insieme dei vettori $(1, -1, -1)$, $(2, -3, 0)$, $(1, 0, -3)$ ha una base data dall'insieme dei $(2, -3, 0)$, $(1, 0, -3)$;

(3) il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ costituito dalle soluzioni dell'equazione $x + 2y + 3z = 0$ ha una base data dall'insieme dei vettori $(-2, 1, 0)$, $(-3, 0, 1)$.

L'esempio più semplice e generale di base di uno spazio vettoriale è dato dall'insieme dei vettori canonici di $\mathbb{R}^n$

$$\underline{e}_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0), \quad (\text{ 1 nella } i\text{−ma componente}) \quad i = 1, 2, \ldots, n;$$

Questo base si dice "base canonica" di $\mathbb{R}^n$.