Lezione del 03.04.

Si sono considerate le basi di uno spazio vettoriale finitamente generato e si sono sviluppati i seguenti argomenti: si è provato che tutte le basi di uno stesso spazio vettoriale hanno lo stesso numero di vettori, numero che si è defìnto "dimensione" dello spazio vettoriale; si è stabilita una proposizione sugli insiemi di n vettori in uno spazio vettoriale di dimensione n; si sono definite le "coordinate" di un vettore rispetto ad una base; infine, si è dato un metodo per determinare una base di un sottospazio di uno spazio $\mathbb{R}^n$ generato da dati vettori. I riferimenti sono

Cap.4 "Basi e dimensione", Par.4.2 "Il concetto di dimensione", Par.4.3 "L'algoritmo di Gauss come un metodo pratico ..." (prima parte).

L'insieme degli argomenti della lezione è un po' diverso dall'insieme degli argomenti del testo (in particolare: a lezione si è dato un teorema sulla relazione fra numerosità di insiemi generatori e insiemi linearmente indipendenti che non è dato nel testo; nel testo è dato il teorema del completamento che non è stato dato a lezione). Viene esposto nel dettaglio di seguito.

Basi di uno spazio vettoriale.

Al termine della lezione precedente abbiamo dato la

Definizione. Un sottinsieme finito A di uno spazio vettoriale V si dice "base" di V se A genera V ed è linearmente indipendente.

Possiamo allora riformulare la proposizione sui sottospazi generati introduttiva al concetto di base come segue:

Proposizione. Ogni spazio vettoriale V che possiede un insieme generatore finito possiede una base; di più, da ogni insieme generatore finito di V si può estrarre una base di V.

Uno spazio vettoriale che posside un insieme generatore finito si dice "finitamente generato"; dunque questa proposizione può essere espressa in breve come: ogni spazio vettoriale finitamente generato possiede una base. Non diamo (anche se è possibile dare) i concetti di insieme generatore, linearmente indipendente e base per insiemi infinti.

Esempi di basi.

1. Spazio vettoriale $\mathcal{V}_o^2$; ciascun insieme di due vettori non allineati è una base di $\mathcal{V}_o^2$, e ciascun insieme base di $\mathcal{V}_o^2$ è di questo tipo.

2. Spazio vettoriale $\mathcal{V}_o^3$; ciascun insieme di tre vettori non complanari è una base di $\mathcal{V}_o^3$, e ciascun insieme base di $\mathcal{V}_o^3$ è di questo tipo.

3. Spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$; l'insieme dei vettori canonici $\underline{e}_i$, $(i = 1, \ldots, n)$ è una base (base canonica) di $\mathbb{R}^n$; abbiamo visto che ogni lista di più di n vettori di $\mathbb{R}^n$ è linearmente dipendente, dunque tutte le basi di $\mathbb{R}^n$ sono costituite da al più n vettori.

4. Sottospazio vettoriale $\langle A \rangle$ generato da un sottinsieme finito A di $\mathbb{R}^n$; c'è una procedura per determinare un sottinsieme A' di A che sia base di $\langle A \rangle$; questa procedura comporta delle scelte e porta a varie basi di $\langle A \rangle$.

5. Spazio vettoriale $\mathbb{R}_n[x]$ dei polinomi di grado minore uguale ad n; l'insieme dei monomi $1, x, \ldots, x^n$ è una base di $\mathbb{R}_n[x]$.

6. Spazio vettoriale $\mathbb{R}[x]$ dei polinomi; non è finitamente generato, quindi non possiede un insieme base finito.

Dimensione

Osservazione. Tutte le basi dello spazio vettoriale geometrico $\mathcal{V}_o^2$ sono costituite da 2 vettori, e tutte le basi dello spazio vettoriale geometrico $\mathcal{V}_o^3$ sono costituite da 3 vettori. Di seguito mostriamo che questi fatti sono le prime istanze di un fatto generale.

Notazione. Per ciascun insieme finito A indichiamo il numero di elementi di A con $|A|$.

Teorema. Siano A, G sottinsiemi finiti di uno spazio vettoriale V, con G insieme generatore di V. Se $|A| \geq |G| + 1$, allora A è linearmente dipendente.

Idea della dimostrazione. Basta provare l'asserto nel caso $|A| = |G| + 1$ (per provare che un insieme è dipendente basta provare che un suo sottinsieme è dipendente). Consideriamo solo i casi $|G| = 0, 1, 2$.

(0) Sia $G = \emptyset$. Allora $V = \{\underline{0}\}$ e $A = \{\underline{0}\}$. Allora A è linearmente dipendente.

(1) Sia $G = \{\underline{a}\}$. Allora $V = \{\alpha\underline{a};\ \alpha \in \mathbb{R}\}$ e $A = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$ con

$$\begin{aligned} \underline{v}_1 &= \alpha_1\underline{a}, \\ \underline{v}_2 &= \alpha_2\underline{a}. \end{aligned}$$

Se $\alpha_1 = 0$, allora $\underline{v}_1 = \underline{0}$, allora A è linearmente dipendente; sia dunque $\alpha_1 \neq 0$. Sottraendo a $\underline{v}_2$ un opportuno multiplo scalare di $\underline{v}_1$ si ottiene il vettore nullo, specificamente

$$\underline{v}_2 - (\alpha_2/\alpha_1)\underline{v}_1 = \underline{0}.$$

Allora A è linearmente dipendente.

(2) Sia $G = \{\underline{a}, \underline{b}\}$. Allora $V = \{\alpha\underline{a} + \beta\underline{b};\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ e $A = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$ con

$$\begin{aligned} \underline{v}_1 &= \alpha_1\underline{a} + \beta_1\underline{b} \\ \underline{v}_2 &= \alpha_2\underline{a} + \beta_2\underline{b} \\ \underline{v}_3 &= \alpha_3\underline{a} + \beta_3\underline{b}. \end{aligned}$$

Se α_1, α_2 sono entrambi nulli, allora $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2\} \subseteq \langle\underline{b}\rangle$; allora per il caso precedente $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$ è linearmente dipendente; allora A è linearmente dipendente. Sia dunque uno fra α_1, α_2 diverso da zero, posso pensare $\alpha_1 \neq 0$. Sottraendo a $\underline{v}_2, \underline{v}_3$ opportuni multipli scalari di $\underline{v}_1$ si ottengono multipli scalari di $\underline{b}$, specificamente

$$\begin{aligned} \underline{v}_2 - (\alpha_2/\alpha_1)\underline{v}_1 &= (\beta_2 - (\alpha_2/\alpha_1)\beta_1)\underline{b} \\ \underline{v}_3 - (\alpha_3/\alpha_1)\underline{v}_1 &= (\beta_3 - (\alpha_3/\alpha_1)\beta_1)\underline{b}; \end{aligned}$$

per il passo precedente, i due vettori

$$\underline{v}_2 - (\alpha_2/\alpha_1)\underline{v}_1,\ \underline{v}_3 - (\alpha_3/\alpha_1)\underline{v}_1$$

sono linearmente dipendenti; esistono dunque due scalari x, y non entrambi 0 tali che

$$x(\underline{v}_2 - (\alpha_2/\alpha_1)\underline{v}_1) + y(\underline{v}_3 - (\alpha_3/\alpha_1)\underline{v}_1) = \underline{0}$$

cioè

$$(\dots)\underline{v}_1 + x\underline{v}_2 + y\underline{v}_3 = \underline{0};$$

allora A è linearmente dipendente.

Teorema. Se $A, G \subseteq V$ sono sottinsiemi finiti, con A linearmente indipendente e G generatore di V, allora

$$|A| \leq |G|.$$

Se $B_1, B_2 \subseteq V$ sono basi di V, allora

$$|B_1| = |B_2|.$$

Dimostrazione.

Prima affermazione: è una riformulazione del teorema precedente.

Seconda affermazione: da B_1 linearmente indipendente e B_2 insieme generatore di V segue $|B_1| \leq |B_2|$; da B_1 insieme generatore di V e B_2 linearmente indipendente segue $|B_1| \geq |B_2|$; dunque $|B_1| = |B_2|$.

Definizione. Si dice "dimensione" di uno spazio vettoriale (finitamente generato) V il numero di vettori di una qualsiasi sua base; in simboli:

$$\dim(V) = |B|, \quad (B \text{ una base di } V).$$

Osserviamo che, per ogni A, G sottinsiemi rispettivamente linearmente indipendente e generatore di V si ha

$$|A| \leq \dim(V) \leq |G|.$$

Esempi.

1. Gli spazi vettoriali geometrici hanno dimensione uguale alla usuale dimensione dei rispettivi spazi geometrici ambiente:

$$\dim(\mathcal{V}_o^i) = i, \quad (i = 0, 1, 2, 3)$$

2. Ciascuno spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ possiede una base, la base canonica $\underline{e_i}$ $(i = 1, \dots, n)$, composta da n vettori, dunque tutte le basi di $\mathbb{R}^n$ sono costituite da n vettori, ed $\mathbb{R}^n$ ha dimensione n :

$$\dim(\mathbb{R}^n) = n$$

3. Caso particolare. Per ciascun $A \subseteq \mathbb{R}^n$, tutti i sottinsiemi $A' \subseteq A$ che sono basi di $\langle A \rangle$ hanno lo stesso numero di vettori; questo numero è $\dim\langle A \rangle$.

Esercizio. Per ciascuno dei seguenti sottinsiemi di $\mathbb{R}^3$, stabilire se è linearmente indipendente, se genera $\mathbb{R}^3$, se è una base di $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned}
A &= \{(2, 3, 4), (4, 6, 7)\} \\
B &= \{(1, 0, 0), (2, 1, 0), (5, 3, 1)\} \\
C &= \{(2, 3, 0), (3, 5, 0), (5, 7, 0)\} \\
D &= \{(1, 0, 0), (2, 1, 0), (5, 3, 1), (9, 5, 7)\}
\end{aligned}$$

Svolgimento (I parte). Questo esercizio può essere svolto usando solo le definizioni di insieme indipendente, generatore e base; questo svolgimento comporta un certo numero di calcoli. Usando solo i teoremi precedenti e il fatto che $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$, si può rispondere a qualche richiesta senza fare calcoli. Di seguito riportiamo uno svolgimento parziale, che completeremo dopo avere dato un'altra proposzione.

A è costituito da 2 vettori, dunque A non è un insieme generatore di $\mathbb{R}^3$ e nemmeno una base di $\mathbb{R}^3$; A è linearmente indipendente (A è costituito da 2 vettori non nulli e non proporzionali);

B è linearmente indipendente (l'uguaglianza $\alpha(1,0,0)+\beta(2,1,0)+\gamma(5,3,1) = (0,0,0)$ implica l'uguaglianza fra le terze componenti, che porge $\gamma = 0$; l'uguaglianza $\alpha(1,0,0)+\beta(2,1,0) = (0,0,0)$ implica l'uguaglianza fra le seconde componenti, che porge $\beta = 0$; l'uguaglianza $\alpha(1,0,0) = (0,0,0)$ porge $\alpha = 0$); rimando la risposta alle altre due domande;

C non genera $\mathbb{R}^3$ (con combinazioni lineari $\alpha(2,3,0) + \beta(3,5,0) + \gamma(5,7,0)$ non si possono ottenere vettori con terza componente $\neq 0$), dunque C non è una base di $\mathbb{R}^3$; rimando la risposta all'altra domanda;

D è costituito da 4 vettori, dunque D è linearmente dipendente e non è una base di $\mathbb{R}^3$; osservo che D contiene B; rimando la risposta all'altra domanda.

Proposizione. Siano: V uno uno spazio vettoriale e $A \subseteq V$ con $|A| = \dim(V)$. Le seguenti affermazioni sono equivalenti

(1) A è una base di V;

(2) A è linearmente indipendente;

(3) A genera V.

Dimostrazione. Per provare l'equivalenza delle tre affermazioni basta provare che, sotto l'ipotesi $|A| = \dim(V)$, si ha (A linearmente indipendente) equivale a (A genera V). Proviamo solo che (A genera V) implica (A linearmente indipendente).

Per assurdo, supponiamo che A generi V ma sia linearmente dipendente. Allora A contiene propriamente un sottinsieme A' che è una base di V. Si ha la contraddizione $\dim(V) = |A| > |A'| = \dim(V)$.

Svolgimento dell'esercizio (II parte). Usando solo questa proposizione e il fatto che $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$, si può completare lo svolgimento dell'esercizio come segue.

B ha 3 vettori ed è linearmente indipendente, dunque B genera $\mathbb{R}^3$ ed è una base di $\mathbb{R}^3$;

C ha 3 vettori e non genera $\mathbb{R}^3$, dunque C è linearmente dipendente;

D contiene B e B genera $\mathbb{R}^3$, dunque anche D genera $\mathbb{R}^3$.

Un metodo efficiente per la costruzione di basi.

Abbiamo visto un metodo per costruire una base del sottospazio generato da un insieme A : si verifica se A è indipendente; in caso affermativo, A è una base di $\langle A \rangle$; in caso negativo, si determina (almeno) una relazione fra i vettori di A e tramite di essa si riconosce (almeno) un vettore di A che è combinazione lineare degli altri; si toglie da A questo vettore e si riparte ... si ottiene infine un sottinsieme A' di A che è una base di $\langle A \rangle$. Questo metodo in generale comporta molti calcoli (si può migliorare, mediante un approfondimento teorico, ma non seguiamo questo sviluppo). Di seguito mostriamo un metodo diverso per costruire una base del sottospazio di $\mathbb{R}^n$ generato da un insieme, una base in generale non contenuta nell'insieme generatore; è un analogo dell'algoritmo di Gauss (con un significato diverso, consiste degli stessi calcoli).

Di seguito, identifichiamo liste di m vettori in $\mathbb{R}^n$ con matrici di tipo $m \times n$. Il metodo si basa sulle seguenti due proposizioni

Proposizione 1. Le operazioni elementari sulle righe di una matrice $m \times n$ lasciano invariato il sottospazio di $\mathbb{R}^n$ generato dalle m righe della matrice. Specificamente: se $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_m$ sono le m righe di una matrice $m \times n$ ed applicando a queste righe una o più operazioni elementari si ottiene una matrice $m \times n$ con righe $\underline{v}'_1, \underline{v}'_2, \ldots, \underline{v}'_m$ allora

$$\langle \underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_m \rangle = \langle \underline{v}'_1, \underline{v}'_2, \ldots, \underline{v}'_m \rangle$$

Dimostrazione. Proviamo l'enunciato solo per le operazioni elementari del tipo "sommare ad una riga un multiplo scalare di un'altra riga" (la prova per quelle di tipi "moltiplicare una riga per uno scalare non nullo" e "scambiare due righe" è più semplice). Per semplicità supponiamo che l'operazione riguardi le prime due righe. I $\underline{v}'_i$ sono dati da

$$\underline{v}'_1 = \underline{v}_1; \ \underline{v}'_2 = \underline{v}_2 + \lambda \underline{v}_1, \ \underline{v}'_3 = \underline{v}_3 \ \ldots;$$

in particolare, i $\underline{v}'_i$ appartengono al sottospazio generato dai $\underline{v}_i$; dunque il sottospazio generato dai $\underline{v}'_i$ è contenuto nel sottospazio generato dai $\underline{v}_i$. I $\underline{v}_i$ sono dati da

$$\underline{v}_1 = \underline{v}'_1; \ \underline{v}_2 = \underline{v}'_2 - \lambda \underline{v}'_1, \ \underline{v}_3 = \underline{v}'_3 \ \ldots$$

in particolare, i $\underline{v}_i$ appartengono al sottospazio generato dai $\underline{v}'_i$; dunque il sottospazio generato dai $\underline{v}_i$ è contenuto nel sottospazio generato dai $\underline{v}'_i$.

Proposizione 2. Sia data una matrice $m \times n$ a scala per righe e siano $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_p$ le sue righe non nulle. Allora $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_p$ sono linearmente indipendenti, dunque sono una base per il sottospazio di $\mathbb{R}^n$ generato da tutte le righe della matrice.

Dimostrazione. Gli indici di colonna dei pivot di $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_p$ siano rispettivamente $j_1 < j_2 < \cdots < j_p$; per semplicità indichiamo tutti i pivot con uno stesso simbolo $\spadesuit$ (useremo solo il fattto che $\spadesuit \neq 0$). Consideriamo l'uguaglianza

$$\lambda_1 \underline{v}_1 + \lambda_2 \underline{v}_2 + +\lambda_3 \underline{v}_3 + \cdots + \lambda_p \underline{v}_p = \underline{0}.$$

Valutando la j_1-ma componente ai due membri otteniamo

$$\lambda_1 \spadesuit + \lambda_2 0 + \lambda_3 0 + \cdots + \lambda_p 0 = 0; \quad \lambda_1 = 0;$$

dunque l'uguaglianza diviene

$$\lambda_2 \underline{v}_2 + \lambda_3 \underline{v}_3 + \cdots + \lambda_p \underline{v}_p = \underline{0}.$$

Valutando la j_2-ma componente ai due membri otteniamo

$$\lambda_2 \spadesuit + \lambda_3 0 + \cdots + \lambda_p 0 = 0; \quad \lambda_2 = 0;$$

... infine si ottiene $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \ldots = \lambda_p = 0$.

Da queste due proposizioni discende la

Proposizione 3. Siano dati m vettori $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_m$ di $\mathbb{R}^n$ e sia A la corrispondente matrice $m \times n$; si applichi ad A il processo di Gauss; sia A' la matrice $m \times n$ a scala ottenuta e siano $\underline{v}'_1, \ldots, \underline{v}'_p, \underline{0}, \ldots, \underline{0}$ ($\underline{v}'_i$ non nulli) i corrispondenti m vettori di $\mathbb{R}^n$. Allora $\underline{v}'_1, \ldots, \underline{v}'_p$ è una base del sottospazio $\langle \underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_m \rangle$.

Applicazione. Sono dati i 4 vettori di $\mathbb{R}^3$

$$(1,3,2),\ (1,4,3),\ (1,5,4),\ (1,6,5).$$

A questi vettori corrisponde la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 5 & 4 \\ 1 & 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

Applichiamo un procedimento di Gauss. Otteniamo la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

I vettori $(1,3,2), (0,1,1)$ sono una base del sottospazio generato dai vettori dati.

Coordinate.

Il concetto di base (ordinata) di uno spazio vettoriale è la generalizzazione (forte) del concetto di sistema di riferimento geometrico. Ciascuna base di uno spazio vettoriale permette di associare a ciascun vettore le sue "coordinate" e quindi di identificare lo spazio vettoriale con uno spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$.

Proposizione. Siano V uno spazio vettoriale, $\underline{v}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ una base di V e $\underline{v}$ un vettore in V. Allora il vettore si può scrivere in uno ed un solo modo come combinazione lineare dei vettori della base, cioè esiste una ed una sola lista di scalari x_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ tale che

$$\underline{v} = x_1\underline{v}_1 + x_2\underline{v}_2 + \cdots + x_n\underline{v}_n.$$

gli scalari x_i si dicono "coordinate" del vettore rispetto alla base.

Dimostrazione. $\underline{v}$ si può scrivere in almeno un modo come combinazione lineare dei vettori $\underline{v}_i$ perchè i vettori $\underline{v}_i$ generano V. $\underline{v}$ si può scrivere in al più un modo come combinazione lineare dei vettori $\underline{v}_i$; infatti, da due scritture

$$\begin{aligned} \underline{v} &= x_1\underline{v}_1 + x_2\underline{v}_2 + \cdots + x_n\underline{v}_n, \\ \underline{v} &= y_1\underline{v}_1 + y_2\underline{v}_2 + \cdots + y_n\underline{v}_n \end{aligned}$$

si ottiene la scrittura

$$\underline{0} = (y_1 - x_1)\underline{v}_1 + (y_2 - x_2)\underline{v}_2 + \cdots + (y_n - x_n)\underline{v}_n$$

dalla quale segue $(y_i - x_i) = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ perchè i vettori $\underline{v}_i$ sono linearmente indipendenti; dunque $y_i = x_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Notazione. Per ogni lista di vettori $\mathcal{B} : \underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n$ base di uno spazio vettoriale V ed ogni vettore $\underline{v}$ in V, la lista $x_1, x_2, \ldots, x_n$ degli scalari tali che

$$\underline{v} = x_1\underline{v}_1 + x_2\underline{v}_2 + \cdots + x_n\underline{v}_n$$

individua un vettore $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ di $\mathbb{R}^n$ che si dice “vettore delle coordinate” di $\underline{v}$ rispetto alla base $\mathcal{B}$ e si indica con $(\underline{v})_{\mathcal{B}}$. Fissata la base $\mathcal{B}$ e lasciando variare $\underline{v}$, si ha dunque una funzione

$$V \to \mathbb{R}^n, \ \underline{v} \mapsto (\underline{v})_{\mathcal{B}}.$$

Questa funzione è una biiezione ed è compatibile con le operazioni di somma e prodotto per scalari negli spazi vettoriali V ed $\mathbb{R}^n$, cioè

$$\begin{aligned} &(\underline{u} + \underline{v})_{\mathcal{B}} = (\underline{u})_{\mathcal{B}} + (\underline{v})_{\mathcal{B}} && \forall \underline{u}, \underline{v} \in V \\ &(\lambda \underline{v})_{\mathcal{B}} = \lambda (\underline{v})_{\mathcal{B}} && \forall \lambda \in \mathbb{R}, \underline{v} \in V. \end{aligned}$$

Dunque, tramite la base ordinata $\mathcal{B}$, lo spazio vettoriale V si può identificare con lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$.