Lezione del 03.04.

Dopo avere svolto un'esercizio in uno spazio vettoriale di polinomi, si è introdotto il concetto di applicazione lineare e l'esempio fondamentale di applicazione lineare da uno spazio $\mathbb{R}^n$ di vettori colonna $n \times 1$ ad uno spazio $\mathbb{R}^m$ di vettori colonna $m \times 1$, cioè le moltiplicazione a sinistra per una data matrice $m \times n$. Il riferimento è

Cap.5 "Applicazioni lineari, Par.5.1 "Definizione di applicazione lineare" (tranne ultima parte dal Th.5.1.7 in poi).

Di seguito si riporta un resoconto degli argomenti svolti.

Basi di spazi vettoriali di polinomi

Consideriamo lo spazio vettoriale dei polinomi di grado al più 2

$$\mathbb{R}_2[x] = \{ax^2 + bx + c;\ a, b, c \in \mathbb{R}\},$$

che possiamo riguardare sia come espressioni formali che come funzioni polinomiali $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$; scegliamo di riguardarli come espressioni formali. Indicheremo i polinomi scrivendoli esplicitamente oppure con lettere latine minuscole sottolineate $\underline{p}, \underline{q}, \ldots$ Questo spazio ha una base ordinata canonica costituita dai polinomi potenza ordinati per grado decrescente $\mathcal{C} : x^2, x, 1$ (un'altra base ordinata canonica è $1, x, x^2$). Dunque $\mathbb{R}_2[x]$ ha dimensione 3. La scrittura $ax^2 + bx + c$ si può intendere come la scrittura del generico polinomio come combinazione lineare $a \cdot x^2 + b \cdot x + c \cdot 1$ dei vettori della base canonica $\mathcal{C}$; dunque $ax^2 + bx + c$ ha vettore delle coordinate

$$(ax^2 + bx + c)_{\mathcal{C}} = (a, b, c)$$

Di seguito mostriamo come si determinano le coordinate di un polinomio rispetto ad altre basi.

Esercizio. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}_2[x]$ si consideri la lista di polinomi

$$\mathcal{B} : x^2 - x,\ x^2 + x,\ x - 1$$

(1) $\mathcal{B}$ è una base (ordinata) di $\mathbb{R}_2[x]$? (2) in caso affermativo, si determinino le coordinate del polinomio $\underline{p} = 2x^2 + 3x + 5$ rispetto a $\mathcal{B}$.

Svolgimento. (1) Essendo $\mathcal{B}$ una linsta di 3 vettori in uno spazio vettoriale di dimensione 3, per verificare che $\mathcal{B}$ è una base basta verificare che $\mathcal{B}$ è linearmente indipendente. Consideriamo un'uguaglianza

$$\alpha(x^2 - x) + \beta(x^2 + x) + \gamma(x^2 - 1) = \underline{0}$$

dove $\underline{0}$ è il polinomio nullo; questa uguaglianza si può riscrivere come

$$(\alpha + \beta + \gamma)x^2 + (-\alpha + \gamma)x - \gamma = \underline{0};$$

dunque si deve avere

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ -\alpha + \beta = 0 \\ -\gamma = 0 \end{cases}$$

da cui $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Dunque $\mathcal{B}$ è una base di $\mathbb{R}_2[x]$.

2) La lista α, β, γ delle coordinate del polinomio $\underline{p}$ rispetto alla base $\mathcal{B}$ è definita dall'uguaglianza

$$\alpha(x^2 - x) + \beta(x^2 + x) + \gamma(x^2 - 1) = 2x^2 + 3x + 5$$

cioè

$$(\alpha + \beta + \gamma)x^2 + (-\alpha + \gamma)x - \gamma = 2x^2 + 3x + 5;$$

questa uguaglianza vale se e solo se

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 2 \\ -\alpha + \beta = 3 \\ -\gamma = 5 \end{cases}$$

cioè $\alpha = 2, \beta = 5, \gamma = -5$. Verifica: deve valere l'uguaglianza fra polinomi

$$2(x^2 - x) + 5(x^2 + x) - 5(x^2 - 1) = 2x^2 + 3x + 5;$$

vera. Sinteticamente, si ha

$$(\underline{p})_{\mathcal{B}} = (2, 5, -5).$$

Applicazioni lineari.

Applicazioni. Ricordiamo che una "funzione" da un insieme "dominio" ad un insieme "codominio" è una legge che associa a ciscun elemento del dominio uno ed un solo "elemento immagine" nel codominio. Se f, A, B indicano la funzione, il dominio ed il codominio, si scrive $f : A \to B$, e per ciascun $a \in A$ l'immagine di a si indica con $f(a)$; l'insieme delle immagini degli elmenti di A si dice "immagine di A" e si indica con $f(A)$, in simboli:

$$\{f(a);\ a \in A\} = f(A).$$

Per ogni insieme A, la funzione da A ad A che associa ad ogni elemento se stesso si dice "funzione identita" e si indica con id_A; in simboli: $\mathrm{id}_A : A \to A$, $\mathrm{id}_A(a) = a$ per ogni $a \in A$. Il termine "applicazione" è sinonimo di "funzione".

Introduzione al concetto di applicazione lineare. Abbiamo visto che, fissata in uno spazio vettoriale V una base ordinata $\mathcal{B} : \underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n$, ciascun vettore di V individua una $n-$pla ordinata di coordinate. Associando a ciascun $\underline{v}$ in V il vettore $(\underline{v})_{\mathcal{B}}$ delle sue coordinate si ha un'applicazione $V \to \mathbb{R}^n$, ed abbiamo visto che questa applicazione è biunivoca e compatibile con le operazioni in V ed in $\mathbb{R}^n$, e dunque permette di identificare lo spazio vettoriale V con lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$. Questo è un primo esempio di applicazione lineare, nel senso della seguente

Definizione. Sia $F : V \to W$ un'applicazione fra due spazi vettoriali V, W. Si dice che F è "lineare" se soddisfa entrambe le condizioni

$$(1) \qquad F(\underline{u} + \underline{v}) = F(\underline{u}) + F(\underline{v}) \qquad \forall \underline{u}, \underline{v} \in V;$$
$$(1) \qquad F(\lambda \underline{u}) = \lambda F(\underline{u}) \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \underline{u} \in V.$$

Esempi ovvi. Per ogni spazio vettoriale V, l'applicazione identica $\mathrm{id}_V : V \to V$ è lineare. Per ogni due spazi vettoriali V, W, l'applicazione $V \to W$ che manda ciascun $\underline{v}$ di V nel vettore nullo 0_W di W è lineare.

Prime proprietà. Sia $F : V \to W$ un'applicazione lineare. Allora

$$F(\underline{0}_V) = \underline{0}_W,$$
$$F(-\underline{v}) = -F(\underline{v}), \qquad \forall \underline{v} \in V$$

Dimostrazione della prima: $F(\underline{0}_V) = F(0\underline{0}_V) = 0F(\underline{0}_V) = \underline{0}_W$. Dimostrazione della seconda: $F(-\underline{v}) = F((-1)\underline{v}) = (-1)F(\underline{v}) = -F(\underline{v})$.

Esempi di applicazioni lineari $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

(A) L'applicazione $L : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, L(x) = 2x$ è lineare in quanto: (1) per ogni $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, da una parte si ha $L(x_1 + x_2) = 2(x_1 + x_2)$ e dall'altra parte si ha $L(x_1) + L(x_2) = 2x_1 + 2x_2$; da $2(x_1 + x_2) = 2x_1 + 2x_2$ (proprietà distributiva del prodotto rispetto alla somma in $\mathbb{R}$) segue $L(x_1 + x_2) = L(x_1) + L(x_2)$ (2) per ogni $\lambda \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}$, da una parte si ha $L(\lambda x) = 2(\lambda x)$ e dall'altra parte si ha $\lambda L(x) = \lambda(2x)$; da $2(\lambda x) = \lambda(2x)$ (proprietà associativa e commutativa del prodotto in $\mathbb{R}$) segue $L(\lambda x) = \lambda L(x)$. Allo stesso modo si prova che per ogni fissato $a \in \mathbb{R}$, l'applicazione

$$L : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, L(x) = ax$$

è lineare. Queste sono le applicazioni che esprimono leggi di proporzionalità diretta fra valori in entrata e valori in uscita. Hanno per grafico le rette passanti per l'origine (escluso il secondo asse coordinato).

(A') L'applicazione $L : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, L(x) = x + 1$ non è lineare in quanto $L(0) = 1 \neq 0$.

(A") L'applicazione $Q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, Q(x) = x^2$ non è lineare. Infatti la proprietà

$$Q(x_1 + x_2) = Q(x_1) + Q(x_2), \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$$

significa

$$(x_1 + x_2)^2 = x_1^2 + x_2^2 \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$$

e questa proprietà è falsa.

(B) L'applicazione $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, L(x, y) = 2x + 3y$ è lineare in quanto: (1) la proprietà

$$L((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) = L(x_1, y_1) + L(x_2, y_2), \quad \forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$$

significa

$$L(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = L(x_1, y_1) + L(x_2, y_2) \quad \forall \ldots$$

che a sua volta significa

$$2(x_1 + x_2) + 3(y_1 + y_2) = 2x_1 + 3y_1 + 2x_2 + 3y_2 \quad \forall \ldots$$

proprietà che è vera (per la commutatività della somma e la prorietà distributiva del prodotto rispetto alla somma in $\mathbb{R}$); (2) la proprietà

$$L(\lambda(x, y)) = \lambda L(x, y), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

significa

$$L(\lambda x, \lambda y) = \lambda L(x, y) \quad \forall \ldots$$

che a sua volta significa

$$2(\lambda x) + 3(\lambda y) = \lambda(2x + 3y) \quad \forall \ldots$$

proprietà che è vera (per la associatività e commutatività del prodotto e la prorietà distributiva del prodotto rispetto alla somma in $\mathbb{R}$). In modo simile si prova che per ogni fissata $n-$pla $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, l'applicazione

$$L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \; L(x_1, \ldots, x_n) = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n \quad \text{in breve} \quad L((x_i)_{i=1}^n) = \sum_{i=1}^n a_ix_i$$

è lineare.

Algebra delle matrici. Proprietà del prodotto rispetto alle altre operazioni.

Prima di proseguire con gli esempi, completiamo il discorso sulle operazioni sulle matrici. Sull'insieme delle matrici ad elementi in $\mathbb{R}$ abbiamo definito le operazioni interne parziali di prodotto e somma e l'operazione esterna di prodotto per scalari. Abbiamo visto le proprietà del prodotto (in particolare associatività e non commutatività) e le proprietà complessive della somma e del prodotto per scalari (che danno la struttura di spazio vettoriale sugli insiemi di matrici di uno stesso tipo fissato). Vediamo ora le proprietà che legano il prodotto alle altre due operazioni.

Proprietà distributive. Partiamo da un esempio; si ha

$$(2\ 3)\left(\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix}\right) = (2\ 3)\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} + (2\ 3)\begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix};$$

infatti: al primo membro si ha $(2\ 3)\left(\begin{smallmatrix} 10 \\ 12 \end{smallmatrix}\right) = 56$; al secondo membro si ha $23 + 33 = 56$. Non è un caso infatti vale la

Proposizione. Per ogni $\underline{a}, \underline{a}' \in \mathrm{M}_{1,n}$ ed ogni $\underline{b}, \underline{b}' \in \mathrm{M}_{n,1}$ si ha

$$\underline{a}(\underline{b} + \underline{b}') = \underline{a}\underline{b} + \underline{a}\underline{b}'$$
$$(\underline{a} + \underline{a}')\underline{b} = \underline{a}\underline{b} + \underline{a}'\underline{b}$$

Dimostrazione della prima proprietà (la seconda è analoga). Posto $\underline{a} = (a_i)_1^n$, $\underline{b} = (b_i)_1^n$, $\underline{b}' = (b_i')_1^n$, la prima proprietà significa

$$\sum_{i=1}^n a_i(b_i + b_i') = \sum_{i=1}^n a_ib_i + \sum_{i=1}^n a_ib_i', \qquad \forall \ldots$$

proprietà vera (per la commutatività della somma e la prorietà distributiva del prodotto rispetto alla somma in $\mathbb{R}$).

Proposizione (proprietà distributiva del prodotto rispetto alla somma). Per ogni $A, A' \in \mathrm{M}_{m,n}$ ed ogni $B, B' \in \mathrm{M}_{n,p}$ si ha

$$A(B + B') = AB + AB'$$
$$(A + A')B = AB + A'B$$

Dimostrazione della prima proprietà (la seconda è analoga). Per ogni $i = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, p$ si ha: la matrice $A(B + B')$ ha elemento di posto (i, j)

$$(A(B + B'))_{ij} = A_{i:}(B + B')_{:j} = A_{i:}(B_{:j} + B'_{:j});$$

la matrice $AB + AB'$ ha elemento di posto (i, j)

$$(AB + AB')_{ij} = (AB)_{ij} + (AB')_{ij} = A_{i:}B_{:j} + A_{i:}B'_{:j};$$

e le ultime espressioni sono uguali per la proposizione precedente.

Si prova anche la

Proposizione (proprietà pseudo associativa fra prodotto e prodotto per scalari). Per ogni $A \in \mathrm{M}_{m,n}$, $B \in \mathrm{M}_{n,p}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ si ha

$$A(\lambda B) = (\lambda A)B = \lambda(AB).$$

Applicazioni lineari $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

Esempio. Consideriamo l'applicazione

$$L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ L(x, y) = (2x + 3y, 4x + 5y, 6x + 7y).$$

Scrivendo le coppie ordinate e le terne ordinate come matrici colonna, si ha

$$L\begin{pmatrix} x \\ \text{‘}y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+3y \\ \text{‘}4x+5y \\ \text{‘}6x+7y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ \text{‘}4 & 5 \\ \text{‘}6 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ \text{‘}y \end{pmatrix}$$

cioè L è l'operazione di moltiplicazione a sinistra per la matrice.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ \text{‘}4 & 5 \\ \text{‘}6 & 7 \end{pmatrix}$$

Convenzione:

> D'ora innanzi, salvo avviso contrario, quando identificheremo ennuple di numeri reali con matrici, le identificheremo con matrici colonna ad n componenti.

Proposizione. Per ciasuna matrice $A \in \mathrm{M}_{m,n}$ fissata, la moltiplicazione a sinistra per A

$$L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \quad L(\underline{x}) = A\underline{x},$$

è un'applicazione lineare.

Dimostrazione. L è un'applicazione $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$; infatti A è di tipo $m \times n$, dunque per ogni $\underline{x}$ di tipo $n \times 1$ il prodotto $A\underline{x}$ è definito ed ha tipo $m \times 1$. L è lineare; infatti ogni $\underline{x}, \underline{x}' \in \mathbb{R}^n$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ si ha

$$\begin{aligned} &(1) \quad L(\underline{x} + \underline{x}') = A(\underline{x} + \underline{x}') = A\underline{x} + A\underline{x}' = L(\underline{x}) + L(\underline{x}') \\ &(1) \quad L(\lambda\underline{x}) = A(\lambda\underline{x}) = \lambda(A\underline{x}) = \lambda L(\underline{x}) \end{aligned}$$

Dunque ogni matrice $m \times n$ fornisce un'applicazione lineare $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Vedremo che non ci sono altre applicazioni lineari al di fuori di queste.