Lezione del 10.04.

Si caratterizzano le applicazioni lineari da uno spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ ad uno spazio $\mathbb{R}^m$, in termini di matrici $m \times n$; più in generale si caratterizzano le applicazioni lineari da uno spazio vettoriale V, con una base ordinata di n vettori, ad uno spazio W, in termini di sequenze ordinate di n vettori di W. Si considera la composizione di applicazioni lineari. Si rappresenta la composizione di applicazioni lineari fra spazi vettoriali di ennuple in termini di moltiplicazione di matrici. Si definscono i sottospazi fondamentali, nucleo e immagine, associati ad un'applicazione lineare, e si caratterizzano le applicazioni lineari iniettive come quelle che hanno nucleo ridotto al solo vettore nullo. Di seguito un resoconto dei principali argomenti svolti. I riferimenti sono:

Cap.5 "Applicazioni lineari", Par.5.2 "Applicazioni lineari e matrici", Par.5.1 "Definizione di applicazione lineare" (Teorema 5.1.7), Par.5.3 "La composizione di applicazioni lineari", Par.5,4 "Nucleo e immagine" (solo definizioni e Prop.5.4.3 e 5.4.8)

Abbiamo visto che per ciascuna matrice A di tipo $m \times n$, l'applicazione $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $\underline{x} \mapsto A\underline{x}$ (vettori pensati come colonne) è (ben definita e) lineare. Ci chiediamo ora se ogni applicazione lineare $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ si ottiene in questo modo, in altri termini se per ciascuna applicazione lineare $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ esiste una matrice A di tipo $m \times n$ tale che $L(\underline{x}) = A\underline{x}$, per ogni $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$.

Un caso particolare significativo. Per ciascuna applicazione lineare $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ si ha

$$\begin{aligned} L\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= L\left(x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \\ &= xL\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + yL\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= x\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+dy \\ bx+ey \\ cx+fy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

dove abbiamo posto

$$L\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad L\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix}.$$

In generale, in modo analogo si dimostra la

Proposizione. Sia $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ un'applicazione lineare. Allora

$$L(\underline{x}) = A\underline{x} \qquad \forall \underline{x} \in \mathbb{R}^n,$$

dove A è la matrice che ha per colonne le immagini in $\mathbb{R}^m$ degli n vettori della base canonica di $\mathbb{R}^n$

$$A = \begin{pmatrix} L(\underline{e}_1) & L(\underline{e}_2) & \cdots & L(\underline{e}_n) \end{pmatrix}$$

Diciamo che l'applicazione lineare L è rappresentata dalla matrice A.

Esempio. Applicazione lineare identità. Per ciascun n fissato, l'identità $\mathrm{id}_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è rappresentata dalla matrice unità I_n :

$$\left(\begin{array}{cccc} \mathrm{id}_n(\underline{e}_1) & \mathrm{id}_n(\underline{e}_2) & \cdots & \mathrm{id}_n(\underline{e}_n) \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cccc} \underline{e}_1 & \underline{e}_2 & \cdots & \underline{e}_n \end{array} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 1 \\ 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix} = I_n$$

Riassumendo, si ha:

Proposizione. Un'applicazione $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ (vettori pensati come colonne) è lineare se e solo se $L(\underline{x}) = A\underline{x}$ (per ogni $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$) dove A è la matrice di tipo $m \times n$ che ha per colonne le immagini in $\mathbb{R}^m$ dei vettori della base canonica di $\mathbb{R}^n$.

Osservazione. Per rappresentare applicazioni lineari come moltiplicazioni a sinistra per matrici è necessario pensare i vettori del dominio e del codominio come colonne. Questa proposizione si può anche esprimere direttamente in termini di ennuple ed emmuple come segue

Proposizione. Un'applicazione $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è lineare se e solo se ognuna delle m componenti di $L(\underline{x})$ è un polinomio omogeneo di primo grado (eventualmente degenere nel polinomio nullo) nelle n componenti di $\underline{x}$.

Vi sono quindi vari modi di rappresentare le applicazioni lineari. Di seguito li esplicitiamo nel caso $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$.

(1) Direttamente in termini di coppie e terne ordinate:

$$L(x_1, x_2) = (a_{11}x_1 + a_{12}x_2, a_{21}x_1 + a_{22}x_2, a_{31}x_1 + a_{32}x_2),$$

(a_{ij} costanti in $\mathbb{R}$).

(2) In termini di colonne, come moltiplicazione a sinistra per matrici di tipo 3×2 :

$$L \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

(3) Assegnando i valori sui vettori della base canonica, rappresentati simbolicamente, oppure come coppie e terne, oppure come colonne:

$$L(\underline{e}_1) = a_{11}\underline{e}_1 + a_{21}\underline{e}_2 + a_{31}\underline{e}_3, \quad L(\underline{e}_2) = a_{12}\underline{e}_1 + a_{22}\underline{e}_2 + a_{32}\underline{e}_3$$

$$L(1,0) = (a_{11}, a_{21}, a_{31}), \quad L(0,1) = (a_{12}, a_{22}, a_{32})$$

$$L \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}, \quad L \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix}$$

Composizione di applicazioni lineari

Composizione di applicazioni fra insiemi. Se $f : A \to B$ e $g : B \to C$, allora ciascun elemento $a \in A$ viene mandato da f in un elemento $f(a) \in B$ che a sua volta viene mandato da g in un elemento $g(f(a)) \in C$; si ha così un'applicazione $A \to C$, che manda ciascun elemento $a \in A$ nell'elemento $g(f(a))$; questa applicazione si dice "applicazione composta" g dopo f e si indica con $g \circ f$. In breve:

$$g \circ f : A \to C, \quad (g \circ f)(a) = g(f(a)) \qquad \forall a \in A.$$

Se $f : A \to B_1$ e $g : B_2 \to C$ con $B_1 \neq B_2$, allora l'applicazione composta $g \circ f$ non è definita.

(Nelle questioni in esame e nell'ambito dell'agebra lineare $g \circ f$ viene definta se e solo se il dominio di g è uguale al codominio di f; per altre questioni ed in altri ambiti, come in analisi matematica, $g \circ f$ viene definita se e solo se il dominio di g contiene l'immagine di f.).

L'operazione di composizione di funzioni è dunque un'operazione parziale. È associativa: tre funzioni f, g, h si possono comporre nell'ordine prima f poi g poi h se e solo il codomino di f è uguale al dominio di g e il codominio di g è uguale al dominio di h e in questo caso si ha

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

Non è non commutativa. Può succedere che due funzioni si possano comporre in un ordine ma non nell'altro; anche quando si possono comporre in entrambi gli ordini può succedere che le due funzioni composte siano diverse. Un esempio: per

$$f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+,\ f(x) = 1 + x; \quad g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+,\ g(x) = \frac{1}{x}$$

si ha che $g \circ f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ e $f \circ g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ sono date da

$$\begin{aligned} g(f(x)) &= g(1 + x) = \frac{1}{1 + x}; \\ f(g(x)) &= f\left(\frac{1}{x}\right) = 1 + \frac{1}{x} \end{aligned}$$

Le applicazioni identità sono elementi neutri, nel senso che per ogni $f : A \to B$ si ha

$$\mathrm{id}_B \circ f = f = f \circ \mathrm{id}_A.$$

Composizione di applicazioni lineari.

Proposizione. Siano $F : V \to W$, $g : W :\to Z$ due applicazioni e $G \circ F : W \to Z$ la loro composta. Se F e G sono lineari, allora anche $G \circ F$ è lineare.

Dimostrazione. Dall'ipotesi che F e G siano compatibili con le operazioni di somma segue che anche $G \circ F$ lo è:

$$\begin{aligned} (G \circ F)(\underline{u} + \underline{v}) &= G(F(\underline{u} + \underline{v})) \\ &= G(F(\underline{u}) + F(\underline{v})) \\ &= G(F(\underline{u})) + G(F(\underline{v})) = (G \circ F)(\underline{u}) + (G \circ F)(\underline{v}), \end{aligned}$$

per ogni $\underline{u}, \underline{v} \in V$. Dall'ipotesi che F e G siano compatibili con le operazioni di prodotto per scalari segue che anche $G \circ F$ lo è:

$$\begin{aligned} (G \circ F)(\lambda \underline{u}) &= G(F(\lambda \underline{u})) \\ &= G(\lambda F(\underline{u})) \\ &= \lambda G(F(\underline{u})) = \lambda (G \circ F)(\underline{u}), \end{aligned}$$

per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ e $\underline{u} \in V$.

Composizione di applicazioni lineari fra spazi di ennuple.

Esempio. Siano $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ e $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ date da

$$\begin{aligned} F(x, y, z) &= (x - 2z, y - 3z); \\ G(x, y) &= (x, y, x + y, x - y). \end{aligned}$$

Allora $G \circ F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ ed è data da

$$\begin{aligned} G(F(x, y, z)) &= G(x - 2z, y - 3z) \\ &= (x - 2z, y - 3z, x + y - 5z, x - y + z). \end{aligned}$$

Utilizzando la rappresentazione con matrici

$$F\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$G\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

si ha

$$\begin{aligned} G\left(F(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix})\right) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -5 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

In generale si prova la

Proposizione. Siano $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e $G : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ date da

$$\begin{aligned} F(\underline{x}) &= A\underline{x}, \quad \forall \underline{x} \in \mathbb{R}^n \qquad (A\ m \times n) \\ G(\underline{x}) &= B\underline{x}, \quad \forall \underline{x} \in \mathbb{R}^m \qquad (B\ p \times m). \end{aligned}$$

Allora $G \circ F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ è data da

$$(G \circ F)(\underline{x}) = (BA)\underline{x}, \quad \forall \underline{x} \in \mathbb{R}^n \qquad (BA\ p \times n).$$

Rappresentazione di applicazioni lineari fra spazi vettoriali.

Abbiamo visto come le applicazioni lineari fra spazi vettoriali di ennuple si possano costruire e rappresentare con matrici, vediamo ora un modo di costruire e rappresentare applicazioni lineari fra spazi vettoriali qualsiasi.

Esempio (I). Consideriamo lo spazio vettoriale $\mathcal{V}_o^2$ dei vettori del piano applicati in un punto fissato O. Fissata una base ordinata $\underline{a}_1, \underline{a}_2$ di $\mathcal{V}_o^2$ ed una coppia ordinata di vettori $\underline{b}_1, \underline{b}_2$ (non necessariamente base) di $\mathcal{V}_o^2$, possiamo definire un'applicazione $\mathcal{V}_o^2 \to \mathcal{V}_o^2$ nel modo seguente: per ciascun vettore $\underline{v}$ consideriamo la sua unica scrittura come combinazione lineare

$$\underline{v} = x\underline{a}_1 + y\underline{a}_2$$

di $\underline{a}_1, \underline{a}_2$ e definiamo $L(\underline{v})$ come la combinazione lineare, con gli stessi coefficienti,

$$L(\underline{v}) = x\underline{b}_1 + y\underline{b}_2$$

di $\underline{b}_1, \underline{b}_2$. Si verifica che questa applicazione è lineare.

Esempio (II). Tutte le applicazioni lineari $\mathcal{V}_o^2 \to \mathcal{V}_o^2$ si possono ottenere come sopra. Specificamente, per ciascuna applicazione lineare $\mathcal{V}_o^2 \to \mathcal{V}_o^2$, ciascun vettore di $\mathcal{V}_o^2$ si può scrivere come

$$\underline{v} = x\underline{a}_1 + y\underline{a}_2$$

e dunque per linearità si deve avere

$$L(\underline{v}) = L(x\underline{a}_1 + y\underline{a}_2) = xL(\underline{a}_1) + yL(\underline{a}_2);$$

basta dunque prendere $\underline{b}_1 = L(\underline{a}_1)$ e $\underline{b}_2 = L(\underline{a}_2)$.

In generale si ha

Teorema. Sia V uno spazio vettoriale con una base ordinata $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n$ e sia W uno spazio vettoriale con una $n-$pla ordinata di vettori $\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_n$. Allora esiste una ed una sola applicazione lineare

$$L : V \to W \quad \text{tale che} \quad L(\underline{a}_i) = \underline{b}_i \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Esplicitamente: per ogni $\underline{v} \in V$, se $\underline{v} = x_1\underline{a}_1 + \cdots + x_n\underline{a}_n$ allora

$$L(\underline{v}) = x_1\underline{b}_1 + \cdots + x_n\underline{b}_n.$$

Esempio. Consideriamo gli spazi vettoriali $\mathbb{R}_1[x]$ ed $\mathbb{R}_2[x]$ dei polinomi a coefficienti in $\mathbb{R}$ nell'indeterminata x rispettivamente aventi grado al più 1 e al più 2. In $\mathbb{R}_1[x]$ fissiamo la base canonica ordinata $x, 1$ ed in $\mathbb{R}_2[x]$ la coppia ordinata $x^2 - 3, x - 4$. Esiste una ed una sola applicazione lineare $L : \mathbb{R}_1[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ tale che

$$L(x) = x^2 - 3, \quad L(1) = x - 4;$$

esplicitamente, si ha

$$\begin{aligned} L(ax + b) &= L(ax + b1) \\ &= a(x^2 - 3) + b(x - 4) = ax^2 + bx + (-3a - 4b). \end{aligned}$$

Sottospazi associati ad un'applicazione lineare. Nucleo e immagine.

Per ciascuna applicazione lineare L, si ha: (1) l'insieme dei vettori del dominio che hanno immagine uguale al vettore nullo del codominio è un sottospazio del dominio, detto "nucleo" di L ed indicato con $\mathrm{Ker}(L)$; (2) l'insieme dei vettori del codominio che sono immagini di qualche vettore del dominio è un sottospazio del codominio, detto "immagine" di L ed indicato con $\mathrm{Im}(L)$. In simboli, per ciascuna applicazione lineare $L : V \to W$ si pone

$$\mathrm{Ker}(L) = \{\underline{v} \in V : \ L(\underline{v}) = \underline{0}\};$$
$$\mathrm{Im}(L) = \{L(\underline{v}) : \ \underline{v} \in V\}.$$

Riportiamo solo la verifica per il nucleo: (1) $\mathrm{Ker}(L)$ è chiuso rispetto alla somma: se $L(\underline{v}_1) = L(\underline{v}_2) = \underline{0}$ allora $L(\underline{v}_1 + \underline{v}_2) = L(\underline{v}_1) + L(\underline{v}_2) = \underline{0} + \underline{0} = \underline{0}$; (2) $\mathrm{Ker}(L)$ è chiuso rispetto al prodotto per scalari: se $L(\underline{v}) = \underline{0}$ allora per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ si ha

$L(\lambda\underline{v}) = \lambda L(\underline{v}) = \lambda\underline{0} = \underline{0}$; (3) $\mathrm{Ker}(L)$ è non vuoto, in quanto contiene il vettore nullo di V. La verifica per l'immagine è lasciata al lettore.

Esempio. Sia
$$L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad L(x,y) = (x-2y, 2x-4y).$$
Il nucleo di L è
$$\begin{aligned}\mathrm{Ker}(L) &= \{(x,y) : \ (x-2y, 2x-4y) = (0,0)\}\\ &= \{(x,y) : \ x-2y = 0)\}\\ &= \{(2y,y) : \ y \in \mathbb{R})\}\\ &= \{y(2,1) : \ y \in \mathbb{R})\} = \langle (2,1)\rangle.\end{aligned}$$
L'immagine di L è
$$\begin{aligned}\mathrm{Im}(L) &= \{(x-2y, 2x-4y); \ (x,y) \in \mathbb{R}^2\}\\ &= \{x(1,2) + y(-2,-4) : \ x,y \in \mathbb{R})\}\\ &= \langle (1,-2), (-2,-4)\rangle = \langle (1,-2)\rangle.\end{aligned}$$

Applicazioni lineari iniettive, suriettive

Richiami. Sia $f : A \to B$ un'applicazione fra insiemi.

f si dice "iniettiva" se soddisfa una delle seguenti tre condizioni equivalenti:

(1) per ogni $a_1, a_2 \in A$, da $a_1 \neq a_2$ segue $f(a_1) \neq f(a_2)$;

(2) per ogni $a_1, a_2 \in A$, da $f(a_1) = f(a_2)$ segue $a_1 = a_2$;

(3) per ogni $b \in B$ esiste al più un $a \in A$ tale che $f(a) = b$.

f si dice "suriettiva" se per ogni $b \in B$ esiste almeno un $a \in A$ tale che $f(a) = b$.

f si dice "biiettiva" se è sia iniettiva che suriettiva, cioè per ogni $b \in B$ esiste uno ed un solo $a \in A$ tale che $f(a) = b$.

Per le applicazioni lineari si ha

Proposizione. Sia $L : V \to W$ un'applicazione lineare. Allora

(1) L è iniettiva se e solo se $\mathrm{Ker}(L) = \{\underline{0}\}$;

(2) L è suriettiva se e solo se $\mathrm{Im}(L) = W$.

Dimostrazione. Proviamo la (1) (la (2) segue direttamente dalle definizioni). Per l'ipotesi L lineare, l'immagine di $\underline{0}_V$ è $\underline{0}_W$.

Sia L iniettiva, cioè ciascun elemento di W sia immagine di al più un elemento in V; allora $\underline{0}_W$, che è immagine di $\underline{0}_V$, è immagine solo di $\underline{0}_V$, cioè $\mathrm{Ker}(L) = \{\underline{0}_V\}$.

Sia $\mathrm{Ker}(L) = \{\underline{0}_V\}$; allora per ogni $\underline{v}_1, \underline{v}_2 \in V$ si ha: $L(\underline{v}_1) = L(\underline{v}_2)$ equivale a $L(\underline{v}_1) - L(\underline{v}_2) = \underline{0}_W$; per la linearità di L, questa uguaglianza si può riscrivere $L(\underline{v}_1 - \underline{v}_2) = \underline{0}_W$; per la defnizione di nucleo, questa uguaglianza si può riscrivere $\underline{v}_1 - \underline{v}_2 \in \mathrm{Ker}(L)$; dall'l'ipotesi segue $\underline{v}_1 - \underline{v}_2 = \underline{0}_V$, che equivale a $\underline{v}_1 = \underline{v}_2$.