Lezione del 11.04.

Si è considerata l'applicazione lineare $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ rappresentata da una matrice A $m \times n$; si è osservato che il nucleo e l'immagine sono il sottospazio di $\mathbb{R}^n$ delle soluzioni del sistema lineare omogeneo $A\underline{x} = \underline{0}$ e il sottospazio di $\mathbb{R}^m$ generato dalle colonne di A; si è data la definizione di rango per righe di una matrice e si è data una formula per la dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare omgeneo; si è enunciato e parzialmente provato un teorema sulla relazione fra le dimensioni del nucleo e dell'immagine. Si è enunciata e dimostrata la versione di questo teorema per un'applicazione lineare fra due spazi vettoriali finitamente generati. I riferimenti sono:

Cap.5 "Applicazioni lineari" Par.5.5 "Il teorema della dimensione" (solo teorema della dimensione, solo enunciato) Par.5.7 "Calcolo del nucleo e dell'immagine"

L'insieme degli argomenti svolti a lezione e la sua organizzazione è un po' diverso da quello del testo, viene esposto di seguito.

Consideriamo un'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Abbiamo visto che

(1) L può essere rappresentata come la moltiplicazione a sinistra per una matrice $m \times n$

$$L(\underline{x}) = A\underline{x}, \quad \forall \underline{x} \in \mathbb{R}^n$$

(2) L è univocamente determinata dalle immagini dei vettori della base canonica di $\mathbb{R}^n$

$$L(x_1\underline{e}_1 + \cdots + x_n\underline{e}_n) = x_1L(\underline{e}_1) + \cdots + x_nL(\underline{e}_n), \quad \forall x_1\underline{e}_1 + \cdots + x_n\underline{e}_n \in \mathbb{R}^n.$$

Le due rappresentazioni sono legate dal fatto che le colonne della matrice sono le immagini in $\mathbb{R}^m$ degli n vettori della base canonica di $\mathbb{R}^n$

$$A = \begin{pmatrix} L(\underline{e}_1) & \ldots & L(\underline{e}_n) \end{pmatrix}$$

Il nucleo di L è

$$\begin{aligned} \mathrm{Ker}(L) &= \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n : \; L(\underline{x}) = \underline{0}_m\}, \\ &= \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n : \; A\underline{x} = \underline{0}_m\}; \end{aligned}$$

è il sottospazio di $\mathbb{R}^n$ costituito dalle soluzioni del sistema lineare omogeneo di m equazioni in n incognite $A\underline{x} = \underline{0}$.

L'immagine di L è

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}(L) &= \{L(x_1\underline{e}_1 + \cdots + x_n\underline{e}_n); \; x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x_1L(\underline{e}_1) + \cdots + x_nL(\underline{e}_n); \; x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\} \\ &= \langle L(\underline{e}_1), \ldots, L(\underline{e}_n)\rangle; \end{aligned}$$

è il sottospazio di $\mathbb{R}^m$ generato dagli n vettori $L(\underline{e}_1), \ldots, L(\underline{e}_n)$.

Sottospazio delle soluzioni di un sistema lineare omgeneo

Problema. Dato un sistema lineare omogeneo di m equazioni in n incognite

$$A\underline{x} = \underline{0} \qquad (A \; m \times n),$$

descrivere una base e la dimensione del sottospazio di $\mathbb{R}^n$ delle soluzioni del sistema, nei termini di qualche caratteristica della matrice A.

1. Consideriamo il caso in cui A sia a scala.

Esempio. Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

consideriamo il sistema lineare omogeneo associato

$$A\underline{x} = \underline{0}_4 \qquad \underline{x} \text{ incognita } \in \mathbb{R}^5$$

ed indichiamo con S il sottospazio di $\mathbb{R}^5$ delle soluzioni del sistema.

Il sistema ha $\infty^{5-3} = \infty^2$ soluzioni, specificamente infinite soluzioni che dipendono dalle due variabili libere $x_4 e x_5$, la soluzione generale è

$$\begin{aligned}&(2x_4 + 3x_5, 4x_4 + 5x_5, 6x_4 + 7x_5, x_4, x_5) \\ &\qquad = x_4(2,4,6,1,0) + x_5(3,5,7,0,1) \quad x_4, x_5 \in \mathbb{R};\end{aligned}$$

si noti che:

$(2,4,6,1,0), (3,5,7,0,1)$ generano S e sono linearmente indipendenti, dunque sono una base di S;

(2,4,6,1,0) è la soluzione del sistema ottenuta ponendo $x_4 = 1$ e $x_5 = 0$;

$(3,5,7,0,1)$ è la soluzione del sistema ottenuta ponendo $x_4 = 0$ e $x_5 = 1$.

In generale, si prova la

Proposizione 1. Sia A una matrice di tipo $m \times n$ a scala per righe e sia p il numero di righe non nulle di A. Allora il sistema lineare omgeneo di m equazioni in n incognite $A\underline{x} = \underline{0}$ ha ∞^{n-p} soluzioni, che dipendono da $n-p$ variabili libere, e gli n-p vettori

$$\underline{v}_i = \text{ soluzione con la } i\text{−ma variabile libera} = 1 \text{ e tutte le altre} = 0 \quad (i = 1, \ldots, n-p)$$

sono una base di S. Dunque

$$\dim(S) = n - p.$$

2. Definizione. Sia A una matrice $m \times n$

$$A = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_m \end{pmatrix} \qquad R_i \in \mathbb{R}^n \ (i = 1, 2, \ldots, m)$$

Definiamo il "rango per righe" di A, ed indichiamo con $\mathrm{rr}(A)$, la dimensione del sottospazio di $\mathbb{R}^n$ generato dalle m righe di A; in simboli:

$$\mathrm{rr}(A) = \dim\langle R_1, R_2, \ldots, R_m\rangle$$

Osservazione 2.1. Questa definizione è coerente con quella data in precedenza per le matrici a scala per righe come numero delle righe non nulle. Infatti, se A è una matrice $m \times n$ a scala per righe, allora le righe non nulle di A sono una base del sottospazio generato da tutte le righe di A, dunque la dimensione del sottospazio generato dalle righe di A è il numero delle righe non nulle di A.

Osservazione 2.2. Se A' è una matrice $m \times n$ ottenuta da A tramite una o più operazioni elementari per righe

$$A' = \begin{pmatrix} R'_1 \\ R'_2 \\ \vdots \\ R'_m \end{pmatrix} \qquad R'_i \in \mathbb{R}^n \ (i = 1, 2, \ldots, m),$$

allora abbiamo visto che

$$\langle R_1, R_2, \ldots, R_m \rangle = \langle R'_1, R'_2, \ldots, R'_m \rangle$$

dunque in particolare

$$\mathrm{rr}(A) = \mathrm{rr}(A').$$

3. Proposizine. Sia A una matrice $m \times n$ e sia S il sottospazio di $\mathbb{R}^n$ delle soluzioni del sistema lineare omogeneo $A\underline{x} = \underline{0}$. Allora

$$\dim(S) = n - \mathrm{rr}(A)$$

Dimostrazione. Sia $(A'|\underline{0})$ una matrice a scala ottenuta applicando un processo di Gauss alla matrice $(A|\underline{0})$ e sia S' il sottospazio di $\mathbb{R}^n$ delle soluzioni di $A'\underline{x} = \underline{0}$. Allora $S' = S$ e $\mathrm{rr}(A') = \mathrm{rr}(A)$, dunque

$$\dim(S) = \dim(S') = n - \mathrm{rr}(A') = n - \mathrm{rr}(A).$$

Relazione fra le dimensioni del nucleo e della immagine di un'applicazine lineare.

Studiare un'applicazione lineare

$$L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \quad L(\underline{x}) = A\underline{x}$$

in particolare implica studiare in contemporanea il suo nucleo e la sua immagine, cioè il sottospazio di $\mathbb{R}^n$ delle soluzioni del sistema $A\underline{x} = \underline{0}$ e il sottospazio di $\mathbb{R}^m$ generato dalle colonne di A. Ci poniamo il problema di determinare quali relazioni sussitono fra n, m e le dimensioni di questi sottospazi.

Esercizio. Consideriamo l'applicazione lineare

$$L : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3, \quad L(\underline{x}) = A\underline{x},$$

dove

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -5 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -7 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{Ker}(A)$ è il sottospazio di $\mathbb{R}^5$ delle soluzioni del sistema lineare omogeneo $A\underline{x} = \underline{0}$; applicando ad A un processo di Gauss si ottiene la matrice

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

dunque

$$\dim(\mathrm{Ker}(L)) = 5 - \mathrm{rr}(A) = 5 - \mathrm{rr}(A') = 5 - 2 = 3.$$

$\mathrm{Im}(L)$ è il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ generato dalle colonne di A, in realtà dalle prime tre colonne (le ultime due sono uguali alle prime due) ... con altre osservazioni più fini si può arrivare ad una base e quindi alla dimensione senza fare conti. Di seguito determiniamo la dimensione di $\mathrm{Im}(L)$ in un modo meccanico, per mettere in evidenza alcuni fatti generali.

Per determinare una base del sottospazio di $\mathbb{R}^5$ generato dalle colonne di A, scriviamo le colonne come righe e con esse costruiamo una matrice; questa matrice si dice matrice trasposta di A e si indica con A^T

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -3 & -5 & -7 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = A^T$$

Applicando a questa matrice un processo di Gauss si ottiene la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

dunque i vettori $(1, 1, 1), (0, 1, 2)$ sono una base di $\mathrm{Im}(L)$ e

$$\dim(\mathrm{Im}(L)) = 2.$$

Osservazione. Nel caso in esame si ha

$$\begin{aligned} &\mathrm{rr}(A) = 2 = \mathrm{rr}(A^T) \\ &\dim(\mathrm{Ker}(L')) + \dim(\mathrm{Im}(L')) = 3 + 2 = dim(\mathbb{R}^5) \end{aligned}$$

In generale si hanno i seguenti teoremi

Teorema 1. Per ciascuna matrice A si ha

$$\mathrm{rr}(A) = \mathrm{rr}(A^T).$$

(vedremo la dimostrazione in seguito)

Teorema 2. Per ciascuna applicazione lineare $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ si ha

$$\dim(\mathrm{Ker}(L)) + \dim(\mathrm{Im}(L)) = n.$$

Dimostrazine (basata sul Teorema 1). Sia L rappresentata da una matrice A. Allora

$$\begin{aligned} \dim(\mathrm{Ker}(L)) &= n - \mathrm{rr}(A) \\ \dim(\mathrm{Im}(L)) &= \mathrm{rr}(A^T). \end{aligned}$$

Per il Teorema 1 si ha $\mathrm{rr}(A) = \mathrm{rr}(A^T)$, dunque sommando membro a membro le due uguaglianze si ha la tesi.

Il Teorema 2 è la versione concreta di un teorema sulle applicazioni lineari fra spazi vettoriali (finitamente generati) qualsiasi

Teorema (della dimensione). Per ciascuna applicazione lineare $L : V \to W$ fra due spazi vettoriali fintamente generati si ha

$$\dim(\mathrm{Ker}(L)) + \dim(\mathrm{Im}(L)) = \dim(V)$$

Dimostrazione. Siano $\underline{z}_1, \ldots, \underline{z}_p$ una base di $\mathrm{Ker}(L)$ e $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_q \in V$ tali che $L(\underline{v}_1), \ldots, L(\underline{v}_q)$ sia una base di $\mathrm{Im}(L)$.

1. I vettori $\underline{z}_1, \ldots, \underline{z}_p, \underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_q$ sono linearmente indipendenti.

   Consideriamo l'uguaglianza

   $x_1\underline{z}_1 + \cdots + x_p\underline{z}_p + y_1\underline{v}_1 + \cdots + y_q\underline{v}_q = \underline{0}$;

   applicando L ad entrambi i membri, per la linearità di L si ottiene l'uguaglianza

   $x_1L(\underline{z}_1) + \cdots + x_pL(\underline{z}_p) + y_1L(\underline{v}_1) + \cdots + y_qL(\underline{v}_q) = \underline{0}$;

   essendo gli $\underline{z}_i$ in $\mathrm{Ker}(L)$ questa uguaglianza diviene

   $y_1L(\underline{v}_1) + \cdots + y_qL(\underline{v}_q) = \underline{0}$;

   essendo $L(\underline{v}_1), \ldots, L(\underline{v}_q)$ linearmente indipendenti si ha $y_1 = \ldots = y_q = 0$;

   dunque l'uguaglianza iniziale diviene

   $x_1\underline{z}_1 + \cdots + x_p\underline{z}_p = \underline{0}$;

   essendo $\underline{z}_1, \ldots, \underline{z}_p$ linearmente indipendenti si ha $x_1 = \ldots = x_p = 0$.

2. I vettori $\underline{z}_1, \ldots, \underline{z}_p, \underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_q$ generano V.

   Sia $\underline{v} \in V$. Considero $L(\underline{v}) \in \mathrm{Im}(L)$.

   Essendo $L(\underline{v}_1), \ldots, L(\underline{v}_q)$ generatori di $\mathrm{Im}(L)$ esistono $\beta_1, \ldots, \beta_q \in \mathbb{R}$ tali che

   $L(\underline{v}) = \beta_1L(\underline{v}_1) + \cdots + \beta_qL(\underline{v}_q)$;

   per la linearità di L questa uguaglianza si può riscrivere

   $L(\underline{v} - \beta_1\underline{v}_1 - \cdots - \beta_q\underline{v}_q) = \underline{0}$;

   essendo $\underline{z}_1, \ldots, \underline{z}_p$ generatori di $\ker(L)$, esistono $\alpha_1, \ldots, \alpha_p \in \mathbb{R}$ tali che

   $\underline{v} - \beta_1\underline{v}_1 - \cdots - \beta_q\underline{v}_q = \alpha_1\underline{z}_1 + \cdots + \alpha_p\underline{z}_p$,

   cioè

   $\underline{v} = \alpha_1\underline{z}_1 + \cdots + \alpha_p\underline{z}_p + \beta_1\underline{v}_1 + \cdots + \beta_q\underline{v}_q$.

3. Per i punti precedenti $\underline{z}_1, \ldots, \underline{z}_p, \underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_q$ è una base di V. Dunque

$$\dim(V) = p + q = \dim(\mathrm{Ker}(L)) + \dim(\mathrm{Im}(L)).$$