Lezione del 17.04.

La lezione consiste di due parti: (1) Come si era definito il rango per righe, analogamente si è definito il rango per colonne di una matrice. Si è mostrato come il processo di Gauss su una matrice A fornisca non solo una base per il sottospazio generato dalle righe di A ma anche un sottinsieme dell'insieme delle colonne di A che è una base del sottospazio generato dalle colonne di A. Si è dato il teorema sull'uguaglianza fra rango per righe e rango per colonne di una matrice; si è definito rango di una matrice il valore comune dei due ranghi. Si è dedotta una forma del teorema della dimensione per le applicazioni lineari fra spazi di ennuple. L'insieme di questi argomenti è strutturato in un modo diverso rispetto al testo. (2) Si sono stabilite delle proposizioni sull'esistenza di applicazioni lineari iniettive o suriettive o biiettive fra due spazi vettoriali. Si è detto isomorfismo un'applicazione lineare biiettiva. Si e provato che esiste un isomorfismo fra due spazi vettoriali se e solo se i due spazi vettoriali hanno la stessa dimensione. Si è evidenziato che ogni spazio vettoriale finitamente generato è isomorfo ad uno spazio vettoriale di ennuple. Come esempio, si sono considerati gli spazi vettoriali $\mathbb{R}_n[x]$. Il riferimento per questa parte è: Cap.5 "Applicazioni lineari" Par.5.5 "Il teorema della dimensione" (Prop.5.5.2) Par.5.6 "Isomorfismo di spazi vettoriali".

Rango di una matrice

Consideriamo una matrice A di tipo $m \times n$,

$$A = \begin{pmatrix} \cdots & R_1 & \cdots \\ & \vdots & \\ \cdots & R_m & \cdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots & & \vdots \\ C_1 & \cdots & C_n \\ \vdots & & \vdots \end{pmatrix}$$

con righe $R_i \in \mathbb{R}^n$ $(i = 1, \ldots, m)$ e colonne $C_j \in \mathbb{R}^m$ $(j = 1, \ldots, n)$. Abbiamo definito il "rango per righe" di A come la dimensione del sottospazio di $\mathbb{R}^n$ generato dalle m righe di A

$$\mathrm{rr}(A) = \dim\langle R_1, \ldots, R_m\rangle;$$

analogamente, definiamo il "rango per colonne" di A come la dimensione del sottospazio di $\mathbb{R}^m$ generato dalle n colonne di A

$$\mathrm{rc}(A) = \dim\langle C_1, \ldots, C_n\rangle$$

Abbiamo visto due modi per determinare una base del sottospazio generato da un dato insieme di vettori: il primo modo porta a costruire una base contenuta nel dato insieme di vettori; il secondo modo si fonda sul fatto che il sottospazio generato dalle righe di una matrice è lasciato invariato dalle operazioni elmentari per righe e nel caso di una matrice a scala ha per base le righe non nulle della matrice. Di seguito mostriamo come un raffinamento del primo modo ed il secondo modo possano essere combinati per dare simultaneamente una base del sottospazio generato dalle righe ed una base del sottospazio generato dalle colonne di una matrice.

Esempio. Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 7 \\ 1 & 2 & 5 & 8 \\ 1 & 3 & 6 & 9 \end{pmatrix},$$

il sottospazio generato dalle righe R_1, R_2, R_3 di A

$$\langle (1,1,4,7), (1,2,5,8), (1,3,6,9) \rangle \subseteq \mathbb{R}^4,$$

il sottospazio generato dalle colonne C_1, C_2, C_3, C_4 di A

$$\langle (1,1,1), (1,2,3), (4,5,6), (7,8,9) \rangle \subseteq \mathbb{R}^3.$$

Determinamo una base e la dimensione di questi sottospazi.

Applicando alla matrice A un procedimento di Gauss otteniamo la matrice

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il sottospazio generato dalle righe di A coincide col sottospazio generato dalle righe di A', e questo ha una base data dalle due righe non nulle. I vettori

$$(1,1,4,7), \ (0,1,1,1)$$

sono una base del sottospazio di $\mathbb{R}^4$ generato dalle righe di A, dunque $\mathrm{rr}(A) = 2$.

Per determinare una base del sottospazio generato dalle colonne di A consideriamo l'equazione

$$x_1C_1 + x_2C_2 + x_3C_3 + x_4C_4 = \underline{0}$$

nelle incognite $x_1, \ldots, x_4 \in \mathbb{R}$. Questa equazione equivale al sistema lineare $A\underline{x} = \underline{0}$, che a sua volta equivale al sistema lineare a scala $A'\underline{x} = \underline{0}$, ed ha soluzione generale

$$(-3x_3 - 6x_4, -x_3 - x_4, x_3, x_4) = x_3(-3,-1,1,0) + x_4(-6,-1,0,1),$$

In particolare, si ha

$$\begin{aligned} -3C_1 - C_2 + C_3 &= \underline{0}, \quad \text{da cui} \quad C_3 = 3C_1 + C_2, \\ -6C_1 - C_2 + C_4 &= \underline{0}, \quad \text{da cui} \quad C_4 = 6C_1 + C_2; \end{aligned}$$

dunque le colonne C_1, C_2 generano il sottospazio generato dalle 4 colonne di A. Queste due colonne sono anche linearmente indipendenti; infatti, se vale un'uguaglianza

$$y_1C_1 + y_2C_2 = \underline{0}, \quad \text{cioè} \quad y_1C_1 + y_2C_2 + 0C_3 + 0C_4 = \underline{0},$$

allora si deve avere

$$(y_1, y_2, 0, 0) = (-3x_3 - 6x_4, x_3, x_4),$$

per opportuni $x_3, x_4 \in \mathbb{R}$, e deve essere $x_3 = x_4 = 0$; ne segue $y_1 = y_2 = 0$. Concludiamo che

$$C_1 = (1,1,1), \ C_2 = (1,2,3)$$

sono una base per il sottospazio generato dalle colonne di A, dunque $\mathrm{rc}(A) = 2$.

In generale, si dimostra la seguente

Proposizione. Siano: A una matrice $m \times n$ con colonne $C_1, \ldots, C_n (\in \mathbb{R}^m)$ e A' una matrice a scala $m \times n$ ottenuta da A tramite un processo di Gauss. Se i pivot di A' sono nelle colonne j_1-ma, ..., j_p-ma, allora le colonne $C_{j_1}, \ldots, C_{j_p}$ di A sono una base per il sottospazio di $\mathbb{R}^m$ generato dalle colonne di A.

Questa proposizione implica il

Teorema. Per ogni matrice A, il rango per righe ed il rango per colonne coincidono:

$$\mathrm{rr}(A) = \mathrm{rc}(A)$$

Dimostrazione. Sia A' una matrice a scala ottenuta da A tramite un processo di Gauss, siano $R'_1, R'_2, \ldots$ le righe di A' e siano $C_1, C_2, \ldots$ le righe di A. Se i pivot di A' compaiano nei posti $(1, j_1), (2, j_2), \ldots, (p, j_p)$, allora: (1) le righe $R'_1, R'_2, \ldots, R'_p$ di A' sono una base del sottospazio generato dalle righe di A; (2) le colonne $C_{j_1}, C_{j_2}, \ldots, C_{j_p}$ di A son una base del sottospazio generato dalle colonne di A. Dunque $\mathrm{rr}(A) = p = \mathrm{rc}(A)$.

Questo teorema permette di dare la seguente

Definizione. Si dice "rango" di una matrice A $m \times n$, e si indica con $\mathrm{r}(A)$, la dimensione del sottospazio generato dalle m righe di A in $\mathbb{R}^n$ e del sottospazio generato dalle n colonne di A in $\mathbb{R}^m$; in simboli:

$$\mathrm{rr}(A) = \mathrm{r}(A) = \mathrm{rc}(A).$$

Rango e trasposizione

Il teorema sul rango per righe e rango per colonne implica il (ed è implicato dal) seguente teorema su rango e trasposizione

Teorema. Ciascuna matrice ha rango uguale al rango della sua trasposta. In simboli, per ogni matrice A,

$$\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}(A^T).$$

Infatti, se una matrice A ha colonne $C_1, \ldots, C_n$

$$A = \begin{pmatrix} \vdots & & \vdots \\ C_1 & \cdots & C_n \\ \vdots & & \vdots \end{pmatrix},$$

allora la matrice A^T ha righe $C_1, \ldots, C_n$

$$A^T = \begin{pmatrix} \cdots & C_1 & \cdots \\ & \vdots & \\ \cdots & C_n & \cdots \end{pmatrix},$$

dunque

$$\mathrm{r}(A) = \mathrm{rc}(A) = \mathrm{rr}(A^T) = \mathrm{r}(A^T).$$

Rango e applicazioni lineari fra spazi di ennuple

I teoremi sulla dimensione dei sottospazi ed il teorema sul rango implicano la seguente forma del teorema della dimensione

Teorema. Sia data un'applicazione lineare

$$L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \quad L(\underline{x}) = A\underline{x}, \quad \forall \underline{x} \in \mathbb{R}^n \qquad (A \ m \times n).$$

Allora:

(1) $\dim\mathrm{Im}(L) = r(A)$;

(2) $\dim\mathrm{Ker}(L) = n - r(A)$;

(3) $\dim\mathrm{Ker}(L) + \dim\mathrm{Im}(L) = n$.

Dimostrazione.

(1) Segue dal fatto che $\mathrm{Im}(L)$ è il sottospazio di $\mathbb{R}^m$ generato dalle colonne di A, dalla definizione di rango per colonne di una matrice, e dal teorema sul rango di una matrice.

(2) Segue dal fatto che $\mathrm{Ker}(L)$ è il sottospazio di $\mathbb{R}^n$ delle soluzioni del sistema lineare omogeneo $A\underline{x} = \underline{0}$, dal teorema su dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo e rango per righe, e dal teorema sul rango di una matrice.

(3) Segue da (1) e (2).

Esercizio. Sia $L : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3, L(\underline{x}) = A\underline{x}$, $\forall \underline{x} \in \mathbb{R}^4$ (A 3×4) dove

$$A = \begin{pmatrix} 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k^2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & k^2 \end{pmatrix}, \quad (k \text{ parametro } \in \mathbb{R})$$

Al variare di $k \in \mathbb{R}$, determinare la dimensione e una base per $\mathrm{Im}(L)$ e la dimensione di $\mathrm{Ker}(L)$.

Diamo tre risoluzioni (la seconda e la terza sono un po' meccaniche).

Risoluzione 1. $\mathrm{Im}(L)$ è il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ generato dalle colonne della matrice A. Osserviamo che:

(1) se $k = 1$ allora tutte le colonne di A sono uguali alla colonna $(1, 1, 1)$; dunque questa colonna è una base di $\mathrm{Im}(L)$ e $\dim\mathrm{Im}(L) = 1$; segue che $\dim\mathrm{Ker}(L) = 4 - \dim\mathrm{Im}(L) = 4 - 1 = 3$;

(1) se $k = -1$ allora l'insieme delle colonne di A è costituito dalle colonne $(1, 1, 1)$ e $(-1, 1, 1)$, che sono linearmente indipendenti; dunque queste due colonne sono una base di $\mathrm{Im}(L)$ e $\dim\mathrm{Im}(L) = 2$; segue che $\dim\mathrm{Ker}(L) = 4 - \dim\mathrm{Im}(L) = 4 - 2 = 2$;

Resta da vedere cosa succede per $k \neq -1, 1$.

Applicando ad A operazioni elementari per righe, si ottiene la matrice

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & k & 1 & 1 \\ 0 & 1-k & k^2-1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-k^2 & k^2-1 \end{pmatrix}$$

Per $k \neq -1, 1$, questa matrice ha rango 3, quindi $\dim\mathrm{Im}(L) = 3$ e, essendo $\mathrm{Im}(L) \subseteq \mathbb{R}^3$, si ha $\mathrm{Im}(L) = \mathbb{R}^3$; segue che $\dim\mathrm{Im}(L) = 4 - 3 = 1$. Una base di $\mathrm{Im}(L) = \mathbb{R}^3$ è data dalla base canonica $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$.

Risoluzione 2. $\mathrm{Im}(L)$ è il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ generato dalle colonne della matrice A. Applicando ad A operazioni elementari per righe, si ottiene la matrice

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & k & 1 & 1 \\ 0 & 1-k & k^2-1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-k^2 & k^2-1 \end{pmatrix}$$

Per $k \neq -1, 1$, questa matrice ha rango 3, quindi $\dim\mathrm{Im}(L) = 3$; segue che $\dim\mathrm{Ker}(L) = 4 - 3 = 1$. Essendo i pivot di A' nella prima, seconda e terza colonna di A', la prima, seconda e terza colonna di A

$$(1, 1, 1), (k, 1, 1), (1, k^2, 1)$$

sono una base di $\mathrm{Im}(L)$.

Per $k = -1$, si ha

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

che ha rango 2, quindi $\dim\mathrm{Im}(L) = 2$; segue che $\dim\mathrm{Ker}(L) = 4 - 2 = 2$; essendo i pivot di A' nella prima e seconda colonna di A', la prima e seconda colonna di A

$$(1, 1, 1), (-1, 1, 1)$$

sono una base di $\mathrm{Im}(L)$.

Per $k = 1$, si ha

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

che ha rango 1, quindi $\dim\mathrm{Im}(L) = 1$; segue che $\dim\mathrm{Ker}(L) = 4 - 1 = 3$; essendo il pivot di A' nella prima colonna di A', la prima colonna di A

$$(1, 1, 1)$$

è una base di $\mathrm{Im}(L)$.

Risoluzione 3. $\mathrm{Im}(L)$ è il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ generato dalle colonne della matrice A, che coincide con quello generato dalle righe della matrice trasposta

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ k & 1 & 1 \\ 1 & k^2 & 1 \\ 1 & 1 & k^2 \end{pmatrix}$$

Applicando a questa matrice operazioni elementari per righe, si ottiene la matrice

$$A'' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-k & 1-k \\ 0 & 0 & 1-k^2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Per $k \neq -1, 1$, questa matrice ha rango 3, quindi $\dim\mathrm{Im}(L) = 3$; segue che $\dim\mathrm{Ker}(L) = 4 - 3 = 1$. La prima, seconda e terza riga di A''

$$(1, 1, 1), (0, 1-k, 1-k), (0, 0, 1-k^2)$$

sono una base di $\mathrm{Im}(L)$.

Per $k = -1$, si ha

$$A'' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

che ha rango 2, quindi $\dim\mathrm{Im}(L) = 2$; segue che $\dim\mathrm{Ker}(L) = 4 - 2 = 2$; la prima e seconda colonna di A''

$$(1, 1, 1), (0, 2, 2)$$

sono una base di $\mathrm{Im}(L)$.

Per $k = 1$, si ha

$$A'' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

che ha rango 1, quindi $\dim\mathrm{Im}(L) = 1$; segue che $\dim\mathrm{Ker}(L) = 4 - 1 = 3$; la prima riga di A''

$$(1, 1, 1)$$

è una base di $\mathrm{Im}(L)$.

Applicazioni lineari iniettive, suriettive; isomorfismi.

Problema: dati due spazi vettoriali finitamente generati V, W, sotto quali condizioni esiste un'applicazione lneare iniettiva, o suriettiva, o biiettiva da V a W?

Proposizione 1. Sono equivalenti le due condizioni: (1) esiste qualche applicazione lineare iniettiva $V \to W$; (2) $\dim(V) \leq \dim(W)$.

Dimostrazione. (1) implica (2). Sia $L : V \to W$ un'applicazione lineare iniettiva. Dunque $\dim\mathrm{Ker}(L) = 0$, e dal teorema della dimensione si ottiene $\dim\mathrm{Im}(L) = \dim(V)$. D'altro canto, essendo $W \supseteq \mathrm{Im}(L)$ si ha $\dim(W) \geq \dim\mathrm{Im}(L)$. Dunque $\dim(W) \geq \dim(V)$.

(2) implica (1). Sia $\dim(V) = n$ e $\dim(W) = m$, con $n \leq m$. Sia $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n$ una base di V e sia $\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_n, \ldots, \underline{b}_m$ una base di W. Esiste una ed una sola applicazione lineare $L : V \to W$ tale che $L(\underline{a}_1) = \underline{b}_1, \ldots, L(\underline{a}_n) = \underline{b}_n$. Questa applicazione è iniettiva; infatti, per ciascun vettore $x_1\underline{a}_1 + \cdots + x_n\underline{a}_n$ in V, l'uguaglianza $L(x_1\underline{a}_1 + \cdots + x_n\underline{a}_n) = \underline{0}$ significa $x_1\underline{b}_1 + \cdots + x_n\underline{b}_n = \underline{0}$; i vettori $\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_n$ sono linearmente indipendenti, dunque $x_1 = \cdots = x_n = 0$ e $x_1\underline{a}_1 + \cdots + x_n\underline{a}_n = 0\underline{a}_1 + \cdots + 0\underline{a}_n = \underline{0}$.

In modo analogo si prova la

Proposizione 2. Sono equivalenti le due condizioni: (1) esiste qualche applicazione lineare suriettiva $V \to W$; (2) $\dim(V) \geq \dim(W)$.

Esercizio. È data l'applicazione lineare $L : \mathbb{R}_1[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ tale che

$$\begin{aligned} L(x) &= kx^2 - 4x + k \\ L(1) &= -3x^2 + kx + 3 \end{aligned}$$

dove k è un parametro in $\mathbb{R}$. Si determinino: (1) i valori di k per i quali L è iniettiva; (2) i valori di k per i quali L è suriettiva.

Risoluzione. Osserviamo che $\dim\mathbb{R}_1[x] = 2 < 3 = \dim\mathbb{R}_2[x]$, dunque non esiste alcun valore di k per il quale L è suriettiva. Determiniamo i valori di k per i quali L è iniettiva, equivalentemente tali che $\mathrm{Ker}(L) = \{\underline{0}\}$. Esplicitamente, l'immagine del generico polinomio $ax + b$ di $\mathbb{R}_1[x]$ è data da

$$\begin{aligned} L(ax + b) = L(ax + b1) &= aL(x) + bL(1) \\ &= a(kx^2 - 4x + k) + b(-3x^2 + kx + 3) \\ &= (ka - 3b)x^2 + (-4a + kb)x + (ka + 3b). \end{aligned}$$

$ax + b$ appartiene a $\mathrm{Ker}(L)$ se e solo se $L(ax + b) = \underline{0}$ cioè

$$\begin{cases} ka - 3b = 0 \\ -4a + kb = 0 \\ ka + 3b = 0 \end{cases}$$

Abbiamo ottenuto un sistema lineare di 3 equazioni nelle due incognite a, b, dipendente dal parametro k. Si trova che per ogni $k \in \mathbb{R}$ il sistema ha solo la soluzione $a = 0, b = 0$ (si lasciano i calcoli al lettore). Dunque per ogni $k \in \mathbb{R}$ l'applicazine lineare L è iniettiva.

Proposizione 3. Sono equivalenti le due condizioni: (1) esiste qualche applicazione lineare biiettiva $V \to W$; (2) $\dim(V) = \dim(W)$.

Questa proposizione segue direttamente dalle due proposizioni precedenti. Mettiamo in evidenza che se $\dim(V) = \dim(W)$, allora un'applicazione lineare biiettiva da V a W si può ottenere a partire da una qualsiasi base $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n$ di V e da una qualsiasi base $\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_n$ di W prendendo $L : V \to W$ come l'unica applicazione lineare tale che $L(\underline{a}_i) = \underline{b}_i$ $(i = 1, \ldots, n)$.

Definizione. Un'applicazione lineare biiettiva si dice "isomorfismo"; si dice che uno spazio vettoriale V è "isomorfo" ad uno spazio vettoriale W, e si scrive $V \cong W$, se esiste un isomorfismo da V a W.

Ogni spazio vettoriale finitamente generato è isomorfo ad uno ed un solo spazio vettoriale di ennuple. Specificamente: se V è uno spazio vettoriale di dimensione n, allora comunque sia scelta una base ordinata $\mathcal{A} : \underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n$ di V, l'unica applicazione lineare $L : V \to \mathbb{R}^n$ tale che $L(\underline{a}_i) = \underline{e}_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ è un isomorfismo. Esplicitamente: ciascun $\underline{v} \in V$ si può scrivere in uno ed un solo modo come

$$\underline{v} = x_1\underline{a}_1 + \cdots + x_n\underline{a}_n$$

e l'immagine di $\underline{v}$ è data da

$$L(\underline{v}) = x_1\underline{e}_1 + \cdots + x_n\underline{e}_n = (x_1, \ldots, x_n).$$

Osserviamo che $(x_1, \ldots, x_n)$ è il vettore delle coordinate di $\underline{v}$ rispetto alla base $\mathcal{A}$, dunque $L(\underline{v}) = (\underline{v})_{\mathcal{A}}$.

Esempio. Lo spazio vettoriale $\mathbb{R}_2[x]$ ha dimensione 3, e dunque è isomorfo ad $\mathbb{R}^3$. Un isomorfismo da $\mathbb{R}_2[x]$ ad $\mathbb{R}^3$ è dato dall'applicazione lineare L che manda i vettori $x^2, x, 1$ base di $\mathbb{R}_2[x]$ nei vettori $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$ base canonica di $\mathbb{R}^3$; esplicitamente, si ha

$$L(ax^2 + bx + c) = L(ax^2 + bx + c1) = a\underline{e}_1 + b\underline{e}_2 + c\underline{e}_3 = (a, b, c).$$

In generale, lo spazio vettoriale $\mathbb{R}_n[x]$ ha dimensione $n + 1$, e dunque è isomorfo ad $\mathbb{R}^{n+1}$. Un isomorfismo da $\mathbb{R}_n[x]$ ad $\mathbb{R}^{n+1}$ è dato dall'applicazione lineare L che manda i vettori $x^n, \ldots, x, 1$ base di $\mathbb{R}_n[x]$ nei vettori $\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n, \underline{e}_{n+1}$ base canonica di $\mathbb{R}^{n+1}$; esplicitamente, si ha

$$L(a_nx^n + \cdots + a_1x + a_0) = (a_n, \ldots, a_1, a_0).$$