Lezione del 02.05.

Si è defnito il determinante di una matrice quadrata come un numero reale che soddisfa certe proprietà rispetto alle righe della matrice. Si è enunciato il teorema di esistenza e unicità del determinante, si è dedotto dalle proprietà il valore del determinante di una matrice triangolare superiore, il comportamento del determinante rispetto alle operazioni elementari sulle righe, e si è dato un processo di Gauss per il calcolo del determinante. Si sono osservate, dedotte ed enunciate una formula per il determinante di una matrice 1×1, 2×2, e 3×3. Si è enunciato e parzialmente provato che il determinante di una matrice è nullo se e solo se le righe della matrice sono linearmente dipendenti. Si è enunciato il teorema sul comportamento del determinante rispetto al prodotto di matrici (teorema di Binet). Si è definita la nozione di inversa di una matrice quadrata; si è parzialmente provato che una matrice è invertibile se e solo se il suo determinante è diverso da zero e si è data una formula per la matrice inversa. Infine si è descritto il ruolo dell'inversione di matrici per la risoluzione di equazioni matriciali. La struttura del discorso è la stessa del testo, ma gli argomenti svolti non sono gli stessi e talvolta uno stesso argomento è trattato in modo diverso. Di seguito si riporta un resoconto dettagliato della lezione.

Riferimenti: Cap.7 Determinante e inversa; Par.7.1 Definizione di determinante; Par.7.2 Calcolo del determinante: casi 2×2 e 3×3; Par.7.4 Inversa di una matrice.

Determinante

Nel seguito indichiamo con M_n l'insieme delle matrici di tipo $n \times n$ ad elementi reali.

Definizione. Un determinante (di ordine n) è una funzione

$$\det : \mathrm{M}_n \to \mathbb{R}$$

che possiede le seguenti proprietà:

(1) Per ogni tre matrici $A, B, C \in \mathrm{M}_n$ che in una riga hanno rispettivamente vettori a, b, c ed in ogni altra riga sono uguali,

$$\text{se} \quad a = b + c \quad \text{allora} \quad \det(A) = \det(B) + \det(C)$$

(2) Per ogni due matrici $A, B \in \mathrm{M}_n$ che in una riga hanno rispettivamente vettori a, b ed in ogni altra riga sono uguali,

$$\text{se} \quad a = \lambda b \quad \text{allora} \quad \det(A) = \lambda \det(B)$$

(3) Per ogni matrice $A \in \mathrm{M}_n$, se A ha due righe uguali, allora

$$\det(A) = 0$$

(4) Il valore sulla matrice unità I_n è

$$\det(\mathrm{I}_n) = 1.$$

Le proprietà 1 e 2 descrivono il comportamento del determinante, come funzione di una ennupla ordinata di righe, rispetto alle due operazioni sulle ennuple ordinate.

Illustriamo di seguito su alcuni esempi il fatto che se esiste una funzione determinante, allora essa è unica.

Esempio.

$$\begin{aligned}
\det\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} &= 4\det\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= 4\left(\det\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \\
&= 4\left(2\det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \\
&= 4(2\cdot 1 + 3\cdot 0) \\
&= 4\cdot 2 = 8
\end{aligned}$$

Nel primo passaggio abbiamo usato la proprietà (2) rispetto alla seconda riga (e il fatto che $(0,4) = 4(0,1)$); nel secondo passaggio la proprietà 81) rispetto alla prima riga (e il fatto che $(2,3) = (2,0) + (0,3)$); nel terzo le proprietà (3) e (4).

Fatto. Le proprietà 1 e 2 si possoo riassumere nell'unica proprietà

(1:2) Per ogni $A, A', A'', \dots, A^{(p)} \in \mathrm{M}_n$ che in una riga hanno rispettivamente vettori $a, a', a'', \dots, a^{(p)}$ ed in ogni altra riga hanno gli stessi vettori,

$$\begin{aligned}
&\text{se} \quad a = \alpha_1 a' + \alpha_2 a'' + \cdots + \alpha_p a^{(p)} \\
&\text{allora} \quad \det(A) = \alpha_1 \det(A') + \alpha_2 \det(A'') + \cdots + \alpha_p A^{(p)}
\end{aligned}$$

Esempio.

$$\begin{aligned}
\det\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix} &= f\det\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= f\left(d\det\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + e\det\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \\
&= df\det\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= df\left(a\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b\det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + c\det\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \\
&= adf
\end{aligned}$$

Definizione. Una matrice quadrata A si dice "triangolare superiore" se tutti i suoi elementi sotto la diagonale discendente sono nulli, cioè se è del tipo

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \qquad a_{ij} \in \mathbb{R}.$$

Proposizione. Il determinante di una matrice triangolare superiore è il prodotto degli elementi diagonali. In simboli, se A è come sopra, allora

$$\det(A) = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

La dimostrazione si svolge in passi analoghi a quelli visti per $n = 2, 3$. Non la diamo.

Osservazione. Come caso particolare di matrici triangolari superiori si hanno le matrici quadrate a scala. Dalla proposizione segue che:

> il determinante di una matrice quadrata a scala è diverso da zero se e solo se i pivot sono gli elementi diagonali.

Teorema. Per ogni intero positivo fissato n esiste una ed una sola funzione determinante.

Abbiamo visto che, se una funzione determinante esiste, allora essa è unica almeno sulle matrici triangolari superiori. La dimostrazione dell'unicità si svolge in passi in qualche modo analoghi. Quanto abbiamo visto non dà alcuna idea della dimostrazione delll'esistenza. Non diamo la dimostrazione.

Il determinante si comporta bene rispetto alle operazioni elementari sulle righe:

Proposizione. Sia $A \in \mathrm{M}_n$.

(1) Se B è ottenuta da A scambiando due righe, allora $\det(B) = -\det(A)$.

(2) Se B è ottenuta da A sommando ad una riga un multiplo scalare di un'altra, allora $\det(B) = \det(A)$.

Dimostriamo solo la (2). Per semplicità, consideriamo il caso in cui B sia ottenuta da A sommando alla seconda riga un multiplo scalare della prima. Indicate con $\underline{a}_1, \underline{a}_2$ le prima e seconda riga di A, con λ lo scalare, e con $*$ la restante parte di A, si ha

$$A = \begin{pmatrix} \underline{a}_1 \\ \underline{a}_2 \\ * \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \underline{a}_1 \\ \underline{a}_2 + \lambda\underline{a}_1 \\ * \end{pmatrix}.$$

Per le proprietà (1,2) e (3) si ha

$$\det B = \det \begin{pmatrix} \underline{a}_1 \\ \underline{a}_2 + \lambda\underline{a}_1 \\ * \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \underline{a}_1 \\ \underline{a}_2 \\ * \end{pmatrix} + \lambda \det \begin{pmatrix} \underline{a}_1 \\ \underline{a}_1 \\ * \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \underline{a}_1 \\ \underline{a}_2 \\ * \end{pmatrix} = \det(A)$$

Applicazione. Data una matrice, possiamo applicare un processo di Gauss per ottenere una matrice a scala, tenendo sotto controllo la variazione del determinante, e dunque ricondurre il determinante della matrice a quello della matrice a scala.

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -1$$

Proposizione (processo di Gauss per il calcolo del determinante). Sia $A \in \mathrm{M}_n$ e sia A' una matrice a scala ottenuta applicando ad A un processo di Gauss. Allora

$$\det(A) = \pm\det(A'),$$

dove il segno è + o - secondo che il numero di scambi di riga nel processo sia pari o dispari.

Formule esplicite per il determinante di matrici 2×2 **e** 3×3.

Per ogni matrice 1×1 si ha

$$\det[a] = a\det(1) = a \cdot 1 = a.$$

Per ogni matrice 2×2 si ha

$$\begin{aligned}
\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &= a\det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & d \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ c & d \end{pmatrix} \\
&= a\left(c\det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) + b\left(c\det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \\
&= a(c \cdot 0 + d \cdot 1) + b(c \cdot (-1) + d \cdot 0) = ad - bc
\end{aligned}$$

Riassumendo,

$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

Esempi.

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2$$
$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = 1 \cdot 6 - 2 \cdot 3 = 0$$
$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot 0 - 2 \cdot 0 = 0$$

La formula per il determinante di una matrice 2×2 si può riscrivere nella forma

$$\det\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

In modo analogo per le matrici 3×3

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$$

si trova la seguente formula per il determinante (formula di Sarrus)

$$\det(A) = a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3$$

Questa formula può essere ricordata come segue. Si considera la tabella 3×5 ottenuta concatenando alla matrice la prima e la seconda colonna

$$\begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_1 & c_2 \end{matrix}$$

e si prende

$$\sum(\text{prodotti degli elementi sulle diagonali discendenti})+$$
$$-\sum(\text{prodotti degli elementi sulle diagonali ascendenti})$$

Esempio. Per la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

si ha

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{matrix}$$

da cui

$$\begin{aligned} \det(A) =& 1 \cdot 2 \cdot 1 \ + \ 2 \cdot 2 \cdot 1 \ + \ 3 \cdot 1 \cdot 1 \ + \\ & - \ 3 \cdot 2 \cdot 1 \ - \ 1 \cdot 2 \cdot 1 \ - \ 2 \cdot 1 \cdot 1 \ = -1 \end{aligned}$$

Commento. La regola di Sarrus dà solo in parte l'idea della formula generale del determinante. Per le matrici $n \times n$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

si trova la seguente formula per il determinante

$$\det(A) = \sum_{(j_1, j_2, \dots, j_n)} \pm a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

dove la sequenza $(j_1, j_2, \dots, j_n)$ varia fra le permutazioni della sequenza $(1, 2, \dots, n)$ (segni dati in funzione delle inversioni fra le due sequenze). Il numero degli addendi è dunque il numero delle permutazioni di n, che è $n! = n(n-1)(n-2) \cdot 1$. In particolare, per $n = 1, 2, 3, 4, 5$ i numeri degli addendi sono 1, 2, 6, 24, 120.

Teorema. Sia $A \in \mathrm{M}_n$ una matrice quadrata. $\det(A) = 0$ se e solo se le righe di A sono linearmente dipendenti.

Dimostrazione parziale. Supponiamo che le righe di A siano linearmente dipendenti e proviamo che $\det(A) = 0$. Indichiamo con $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n$ le righe di A. Esiste una riga che è combinazione lineare delle altre, supponiamo per semplicità che sia la prima:

$$\underline{a}_1 = \sum_{i=2}^{n} \alpha_i \underline{a}_i.$$

Indicate con $A^{(2)}, \dots, A^{(n)} \in \mathrm{M}_n$ le matrici che hanno come prima riga i vettori $\underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n$ e nelle restanti righe sono uguali alla matrice A, per la proprietà (1,2) e per la (3) si ha si ha

$$\det(A) = \sum_{i=2}^{n} \alpha_i \det(A^{(i)}) = \sum_{i=2}^{n} \alpha_i 0 = 0.$$

Il determinante si comporta bene rispetto al prodotto di matrici

Teorema (di Binet). Il determinante del prodotto di due matrici è il prodotto dei determinati delle due matrici. In simboli:

$$\det(AB) = \det(A)\,\det(B).$$

Non diamo la dimostrazione.

Determinante, incertibiltà e inversione di matrici

Ricordiamo che per ciascun numero reale $a \neq 0$ esiste uno ed un solo numero reale b tale che $ab = 1$; si dice che b è l'inverso di a e si pone $b = a^{-1}$.

Definizione. Sia $A \in \mathrm{M}_n$. Si dice che una $B \in \mathrm{M}_n$ è una "inversa" di A se $AB = \mathrm{I}_n = BA$. Si prova che se A possiede un'inversa, allora ne possiede una sola; l'inversa di A si indica con A^{-1}. Dunque se esiste, A^{-1} è caratterizzata dalle uguaglianze

$$AA^{-1} = \mathrm{I}_n = A^{-1}A.$$

Proposizione. Sia $A \in \mathrm{M}_n$. Se A è invertibile, allora $\det(A) \neq 0$.

Dimostrazione. Da $AA^{-1} = \mathrm{I}_n$, per il teorema di Binet e per la proprietà (4) si ha $\det(A)\det(A^{-1}) = \det(\mathrm{I}_n) = 1$; dunque $\det(A) \neq 0$.

Definizione. Sia A una matrice quadrata di tipo $n \times n$. Per ogni $i, j = 1, \ldots, n$, poniamo

$$A_{ij} = \pm\det(\text{ matrice ottenuta da } A \text{ cancellando la } i\text{−ma riga e la } j\text{−ma colonna })$$

dove il segno è + o - secondo che la somma $i + j$ sia pari o dispari, in altri termini il segno è dato da $(-1)^{i+j}$. Il numero reale A_{ij} si dice complemento algebrico di posto (i, j) del amatrice A.

Esempio. I complementi algebrici della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

sono

$$\begin{array}{ll} A_{11} = 4 & A_{12} = -3 \\ A_{21} = -2 & A_{22} = 1 \end{array}.$$

Esempio. I complementi algebrici della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

sono

$$\begin{array}{lll} A_{11} = 0 & A_{12} = 1 & A_{13} = -1 \\ A_{21} = 1 & A_{22} = -2 & A_{23} = 1 \\ A_{31} = -2 & A_{32} = 1 & A_{33} = 0 \end{array}.$$

Proposizione. Sia $A \in \mathrm{M}_n$. Se $\det(A) \neq 0$ allora A è invertibile. Inoltre,

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} A_{11} & \ldots & A_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & \ldots & A_{nn} \end{pmatrix}^T.$$

Non diamo la dimostrazione.

In particolare, per $n = 2$ la formula per la matrice inversa diviene.

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} &= \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}^{T} \\ &= \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Si lascia al lettore verificare che secondo la definizione questa matrice è l'inversa della matrice data.

Esempio.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Esercizio. Si lascia al lettore stabilire che la matrice 3×3 considerata sopra è invertibile, calcolarne l'inversa ed effettuare una verifica.

Nel campo dei numeri reali, gli inversi si usano per risolvere equazioni. Analogamente, per le matrici si ha la

Proposizione. Sia $A \in \mathrm{M}_n$. Se A è invertibile, allora

- ogni equazione $AX = B$ (B di tipo $n \times p$) nell'incognita X $n \times p$ ha una ed una sola soluzione, data da $X = A^{-1}B$.

- ogni equazione $XA = B$ (B di tipo $p \times n$) nell'incognita X $p \times n$ ha una ed una sola soluzione, data da $X = BA^{-1}$.

(Dimostrazione della prima parte dell'enunciato (quella della seconda è analoga). Consideriamo l'equazione $AX = B$; moltiplicando entrambi i membri a sinistra per A^{-1} si ottiene: al primo membro $A^{-1}(AX) = (A^{-1}A)X = \mathrm{I}_n X = X$, al secondo membro $A^{-1}B$. Dunque, se c'è una soluzione, è $X = A^{-1}B$. Questa matrice è una soluzione, in quanto sostituendola alla X nell'equazione si ottiene $A(A^{-1}B) = B$ ... che è un'uguaglianza in quanto $A(A^{-1}B) = (AA^{-1})B = \mathrm{I}_n B = B$.)