Lezione del 08.05.

Si è enunciato che determinante per righe e determinante per colonne coincidono. Si sono considerate le applicazioni lineari biiettive e le loro inverse. Nel caso di applicazioni $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ si è stabilita l'equivalenza fra la biiettività di applicazioni lineari e l'invertibilit di matrici, e la corrispondenza fra l'inversione di applicazioni lineari e l'inversione di matrici. Si è enunciato e parzialmente provato un teorema sulla equivalenza fra proprietà di matrici quadrate espresse nei termini del sistema lineare omogeneo associato, del rango, determinante, e invertibilità della matrice, di invertibilità dell'applicazione lineare associata. L'insieme degli argomenti svolti e la sua organizzazione sono un po' diversi dal testo. Viene riportato un resoconto dettagliato di seguito. La parte del testo più vicina alla lezione è

Cap.7 Par.7.6 le applicazioni lineari da $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^n$

Determinante, righe, colonne, trasposta.

Abbiamo definito il determinante come una funzione di una matrice quadrata che possiede certe proprietà espresse nei termini delle righe. Avremmo potuto definirlo nei termini delle colonne. Avremmo dunque avuto per ciascuna matrice quadrata A un determinante per righe $\det_r(A)$ ed un determinante per colonne $\det_c(A)$, e questi due determinanti sarebbero stati legati dalla relazione

$$\det_c(A) = \det_r(A^T).$$

Ad esempio, per le matrici quadrate 2×2 si avrebbe avuto

$$\det_r \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

$$\det_c \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \det_r \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = ad - cb$$

I due determinanti sono uguali, per la commutatività del prodotto di numeri reali.

Si prova che le due definizioni sono equivalenti, in altri termini si ha il

Teorema. Il determinante di una matrice quadrata è uguale al determinante della sua trasposta; in simboli:

$$\det(A^T) = \det(A)$$

Non diamo la dimostrazione.

Funzione inversa

Terminologia. Sia $f : A \to B$ una funzione fra insiemi. Per ciascun $a \in A$ e $b \in B$, l'uguaglianza $f(a) = b$ si legge dicendo sia che "a è la immagine di b" (secondo f) sia che "b è una preimmagine di a" (secondo f). Se la funzione $f : A \to B$ è biiettiva, allora associando a ciascun elemento di B la sua preimmagine in A si ha una funzione $f^{-1} : B \to A$ detta "funzione inversa" di f. Si ha

$$\forall x \in A,\ f^{-1}(f(x)) = x = \mathrm{id}_A(x), \quad \text{in breve} \quad f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_A$$

$$\forall x \in B,\ f(f^{-1}(x)) = x = \mathrm{id}_B(x), \quad \text{in breve} \quad f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_B$$

Esempio. La funzione esponenziale $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $f(x) = \mathrm{e}^x$ è biiettiva. Per ciascun $r \in \mathbb{R}^+$ l'equazione $\mathrm{e}^x = r$ ha una ed una sola soluzione, che si dice "logaritmo" di r (in base e) e si indica con $\log(r)$. La funzione esponenziale ha come inversa la funzione logaritmo $f^{-1} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $f^{-1}(x) = \log(x)$. La funzione esponenziale e la funzione logaritmo sono legate dalle relazioni

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \log(\mathrm{e}^x) = x; \qquad \forall x \in \mathbb{R}^+,\ \mathrm{e}^{\log(x)} = x$$

Proposizione. Sia $f : A \to B$ una funzione. Se esiste una funzione $g : B \to A$ tale che

$$g \circ f = \mathrm{id}_A \quad \text{e} \quad f \circ g = \mathrm{id}_B$$

allora f è biiettiva e $g = f^{-1}$.

Dimostrazione. Proviamo solo che f è biiettiva. f è iniettiva; infatti se $a_1, a_2 \in A$ sono tali che $f(a_1) = f(a_2)$ allora si ha $g(f(a_1)) = g(f(a_2))$ e per la prima uguaglianza $a_1 = a_2$. f è suriettiva; infatti per ogni $b \in B$, per la seconda uguaglianza si ha $b = f(g(b))$, e ciò significa che b ha almeno la preimmagine $g(b)$.

Applicazione inversa di un'applicazione lineare

Esempio. Sia

$$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad F(x, y) = (x + 2y, y)$$

Per ogni $(p, q) \in \mathbb{R}^2$ l'equazione

$$(x + 2y, y) = (p, q)$$

ha una ed una sola soluzione, data da

$$(x, y) = (p - 2q, q).$$

Dunque F è biiettiva e

$$F^{-1} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad F^{-1}(x, y) = (x - 2y, y)$$

Osservazione. F è lineare ed anche F^{-1} è lineare. Non è un caso.

Proposizione. Sia $F : V \to W$ un'applicazione biiettiva fra spazi vettoriali. Se F è lineare, allora anche F^{-1} è lineare.

Dimostrazione. Per ogni $\underline{w}_1, \underline{w}_2 \in W$, indicati con $\underline{v}_1, \underline{v}_2 \in V$ le loro preimmagini, si ha

$$\begin{aligned} F^{-1}(\underline{w}_1 + \underline{w}_2) &= F^{-1}(F\underline{v}_1 + F\underline{v}_2) \\ &= F^{-1}(F(\underline{v}_1 + \underline{v}_2)) \\ &= \underline{v}_1 + \underline{v}_2 \\ &= F^{-1}\underline{w}_1 + F^{-1}\underline{w}_2. \end{aligned}$$

In modo analogo si prova che per ogni $\underline{w} \in W$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ si ha

$$F^{-1}(\lambda \underline{w}) = \lambda F^{-1}(\underline{w})$$

Inversione di applicazioni lineari ed inversione di matrici

Proposizione. Un'applicazione lineare $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $F(\underline{x}) = A\underline{x}$ è biiettiva se e solo se la matrice A è invertibile, in tal caso $F^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è data da $F^{-1}(\underline{x}) = A^{-1}\underline{x}$.

Dinostrazione. L'applicazione lineare $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $F(\underline{x}) = A\underline{x}$, è biiettiva se e solo se esiste un'applicazione lineare $G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $G(\underline{x}) = B\underline{x}$, tale che $G \circ F = \mathrm{id}_n = F \circ G$, cioè $BA\underline{x} = \underline{x} = AB\underline{x}$ per ogni $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$, cioè $BA = \mathrm{I}_n = AB$, cioè A è invertibile con inversa $A^{-1} = B$.

Esempio. Sia

$$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad F(x, y) = (x + 2y, y).$$

In termini matriciali

$$F \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

La matrice che rappresenta F è invertibile, dunque F è biiettiva e

$$F^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

In altri termini,

$$F^{-1} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad F(x, y) = (x - 2y, y).$$

Esercizio. E' data l'applicazione lineare $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che

$$\begin{aligned} G(\underline{e}_1) &= \underline{e}_1 \\ G(\underline{e}_2) &= 2\underline{e}_1 + 2\underline{e}_2 + 4\underline{e}_3 \\ G(\underline{e}_3) &= \underline{e}_1 + k\underline{e}_2 + k^2\underline{e}_3 \end{aligned}$$

(k parametro in $\mathbb{R}$). Determinare per quali k l'applicazione G è invertibile e calcolare G^{-1}.

Svolgimento. L'applicazione lineare G è rappresentata dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & k \\ 0 & 4 & k^2 \end{pmatrix}.$$

Il determinante di A è dato da

$$\det(A) = 2(k^2 - 2k) = 2k(k - 2).$$

A è invertibile se e solo se $\det(A) \neq 0$ cioè $k \neq 0, 2$. Per questi valori di k l'inversa di A è

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{1}{2k(k-2)} \begin{pmatrix} 2k^2 - 4k & 0 & 0 \\ -2k^2 + 4 & k^2 & -4 \\ 2k - 2 & -k & 2 \end{pmatrix}^T \\ &= \frac{1}{2k(k-2)} \begin{pmatrix} 2k^2 - 4k & -2k^2 + 4 & 2k - 2 \\ 0 & k^2 & -k \\ 0 & -4 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -\frac{k+2}{k} & \frac{k-1}{k(k-2)} \\ 0 & \frac{k}{2(k-2)} & -\frac{1}{2(k-2)} \\ 0 & -\frac{2}{k(k-2)} & \frac{1}{k(k-2)} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

L'applicazione inversa $G^{-1} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ è l'applicazione lineare tale che

$$\begin{aligned}
G^{-1}(\underline{e}_1) &= \underline{e}_1 \\
G^{-1}(\underline{e}_2) &= -\frac{k+2}{k}\underline{e}_1 + \frac{k}{2(k-2)}\underline{e}_2 - \frac{2}{k(k-2)}\underline{e}_3 \\
G^{-1}(\underline{e}_3) &= \frac{k-1}{k(k-2)}\underline{e}_1 - \frac{1}{2(k-2)}\underline{e}_2 + \frac{1}{k(k-2)}\underline{e}_3
\end{aligned}$$

Equivalenza di proprietà di matrici quadrate

Teorema. Per ciascuna matrice A quadrata di ordine n sono equivalenti le seguenti proprietà:

(1) il sistema lineare omogeneo $A\underline{x} = \underline{0}$ ha solo la soluzione $\underline{x} = \underline{0}$;

(2) $\mathrm{r}(A) = n$

(3) $\det(A) \neq 0$

(4) A è invertibile

(5) l'applicazione $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \underline{x} \mapsto A\underline{x}$ è biiettiva.

Dimostrazione (parziale). Questo teorema mette in relazione i concetti principali definiti e riassume molte delle proposizioni stabilite finora. L'equivalenza fra le varie proprietà può essere provata in più modi. Un modo (un po' sovrabbondante) consiste nel provare che ciascuna proprietà è equivalente alla successiva. Di seguito tratteggiamo l'idea della dimostrazione delle implicazioni più semplici, lasciando al lettore di rintracciare i dettagli nelle lezioni precedenti.

(1) equivale a (2). Indicate con $C_1, \ldots, C_n \in \mathbb{R}^n$ le n colonne di A, si ha: il sistema $A\underline{x} = \underline{0}$ ha solo la soluzione $\underline{x} = \underline{0}$ se e solo se i vettori $C_1, \ldots, C_n$ sono linearmente indipendenti se e solo se la dimensione del sottospazio $\langle C_1, \ldots, C_n \rangle$ è n, cioè il rango (per colonne) di A è n.

(3) implica (2); equivalentemente, (negazione di (2)) implica (negazione di (3)). Se A ha rango diverso da n, allora A ha rango minore di n, allora A ha righe linearmente dipendenti, allora A ha determinante 0.

(4) implica (3). Se A possiede inversa B, allora per definizione in particolare $AB = \mathrm{I}_n$, allora per il teorema di Binet $\det(A)\det(B) = 1$, allora $\det(A) \neq 0$.

(5) equivale a (4). È il teorema su invertibilità di applicazioni lineari e matrici, sopra enunciato e dimostrato.

Una forma di una versione ridotta di questo teorema risulta particolarmente importante nel seguito:

Teorema. Per ciascuna matrice A quadrata sono equivalenti le seguenti proprietà:

(1') il sistema lineare omogeneo $A\underline{x} = \underline{0}$ ha (oltre alla soluzione $\underline{x} = \underline{0}$) qualche soluzione $\underline{x} \neq \underline{0}$;

(3') $\det(A) = 0$.