Lezione del 09.05.

Le basi degli spazi vettoriali permettono di rappresentare vettori con ennuple e applicazioni lineari con matrici. Si hanno basi più o meno adatte a rappresentare vettori ed applicazioni che compaiono in un dato problema. Bisogna dunque sapere come sono collegate le rappresentazioni di un oggetto rispetto alle diverse basi. Si è ripreso il concetto di ennupla coordinata di un vettore rispetto ad una base; si è introdotto il concetto di matrice di un'applicazione lineare rispetto a basi di codominio e dominio e si è mostrato che alla composizione di applicazioni lineari corrisponde il prodotto di matrici. Si sono introdotte le matrici di cambiamento di base e si è data la relazione fra le matrici che rappresentano una stessa applicazione lineare. Questi argomenti sono stati svolti in modo piuttosto diverso dal testo (specialmente nella notazione) e vengono riportati di seguito in dettaglio.

**Problema.**

Sono date:

- la base ordinata $\mathcal{B} : \underline{v}_1, \underline{v}_2$ di $\mathbb{R}^2$, con $\underline{v}_1 = (1,1), \underline{v}_2 = (1,2)$

- la base ordinata $\mathcal{B}' : \underline{w}_1, \underline{w}_2, \underline{w}_3$ di $\mathbb{R}^3$, con $\underline{w}_1 = (1,0,0)$, $\underline{w}_2 = (2,1,0)$, $\underline{w}_3 = (3,2,1)$

- l'applicazione lineare $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definita assegnado i valori sulla base $\mathcal{B}$

$$F(\underline{v}_1) = \underline{w}_1 + 2\underline{w}_3$$
$$F(\underline{v}_2) = \underline{w}_2 + 3\underline{w}_3$$

Determinare il valore di $F$ sul generico vettore $(x,y)$ di $\mathbb{R}^2$.

Il problema può essere risolto direttamente come segue. (1) Si pone $(x,y) = p(1,1) + q(1,2)$ e si ricava $(p,q)$ in funzione di $(x,y)$. (2) Si considera $F(x,y) = F(p(1,1) + q(1,2))$. (3) Si calcola $F(p(1,1)+q(1,2)) = p((1,0,0)+2(3,2,1))+q((2,1,0)+3(3,2,1))$. Di seguito diamo un procedimento generale che separa nettamente gli aspetti concettuali e gli aspetti di calcolo.

**Ennupla coordinata di un vettore rispetto ad una base.**

Definizione. Siano dati uno spazio vettoriale $V$, una base ordinata $\mathcal{B} : \underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n$ di $V$, un vettore $\underline{v}$ di $V$. La ennupla di scalari che compare nella scrittura di $\underline{v}$ come combinazione lineare dei vettori della base $\mathcal{B}$ si dice "ennupla coordinata" di $\underline{v}$ rispetto a $\mathcal{B}$ e si indica con $\underline{v}_{\mathcal{B}}$. In simboli, si ha

$$\underline{v} = x_1\underline{v}_1 + \cdots + x_n\underline{v}_n \quad \underline{v}_{\mathcal{B}} = (x_1, \ldots, x_n)$$

Esempi. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^2$ consideriamo: la base canonica $\mathcal{C} : (1,0), (0,1)$, la base ordinata $\mathcal{B} : (1,0), (1,1)$, la base ordinata $\mathcal{A} : (1,1), (1,0)$, il vettore $(3,2)$.

La coppia coordinata del vettore rispetto alla base canonica $\mathcal{C}$ è la coppia ordinata $(x,y)$ tale che $(3,2) = x(1,0) + y(0,1)$, cioè tale che $x = 3$ e $y = 2$ dunque $(3,2)_{\mathcal{C}} = (3,2)$.

Le coppia coordinata del vettore rispetto alla base $\mathcal{B}$ è la coppia ordinata $(x,y)$ tale che $(3,2) = x(1,0) + y(1,1)$, cioè tale che $x + y = 3$ e $y = 2$ dunque $(3,2)_{\mathcal{B}} = (1,2)$.

La coppia coordinata del vettore rispetto alla base $\mathcal{A}$ è la coppia ordinata $(x,y)$ tale che $(3,2) = x(1,1) + y(1,0)$, cioè tali che $x + y = 3$ e $x = 2$ dunque $(3,2)_{\mathcal{A}} = (2,1)$.

Fatto. La ennupla coordinata di un vettore $\underline{v}$ di $\mathbb{R}^n$ rispetto alla base canonica $\mathcal{C}$ di $\mathbb{R}^n$ è il vettore stesso: $\underline{v}_{\mathcal{C}} = \underline{v}$.

**Matrice di un'applicazione lineare rispetto a basi di codominio e dominio**

Definizione. Siano dati

- uno spazio vettoriale $V$ con una base ordinata $\mathcal{B} : \underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n$;

- uno spazio vettoriale $W$ con una base ordinata $\mathcal{B}' : \underline{w}_1, \ldots, \underline{w}_m$;

- un'applicazione lineare $F : V \to W$ data da

$$\begin{aligned} &F(\underline{v}_1) = a_{11}\underline{w}_1 + \cdots + a_{m1}\underline{w}_m \\ &\vdots \\ &F(\underline{v}_n) = a_{1n}\underline{w}_1 + \cdots + a_{mn}\underline{w}_m. \end{aligned}$$

La matrice

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

si dice "matrice di F rispetto alle basi" $\mathcal{B}', \mathcal{B}$ e si indica con

$$F_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}$$

(si è scritta volutamente prima la base del codominio e dopo la base del dominio). In altri termini, la matrice di $L$ rispetto a $\mathcal{B}', \mathcal{B}$ è la matrice $m \times n$ che ha per colonne le $m-$uple coordinate rispetto a $\mathcal{B}'$ delle immagini degli $n$ vettori di $\mathcal{B}$ :

$$F_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} = \left( (F\underline{v}_1)_{\mathcal{B}'} \ \cdots \ (F\underline{v}_n)_{\mathcal{B}'} \right).$$

Proposizione (Relazione fondamentale). La $m-$upla coordinata dell'immagine di un vettore è il prodotto della matrice $m \times n$ dell'applicazione lineare per la $n-$upla coordinata del vettore (coordinate e matrici rispetto alle dovute basi); in simboli:

$$(F\underline{v})_{\mathcal{B}'} = F_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} \ \underline{v}_{\mathcal{B}}, \quad \forall \underline{v} \in V.$$

Dimostrazione. Posto

$$\underline{v} = x_1\underline{v}_1 + \cdots + x_n\underline{v}n$$

si ha

$$\begin{aligned} F(\underline{v}) &= x_1 F(\underline{v}_1) + \cdots + x_n F(\underline{v}_n) \\ &= x_1(a_{11}\underline{w}_1 + \cdots + a_{m1}\underline{w}_m) + \cdots + x_n(a_{1n}\underline{w}_1 + \cdots + a_{mn}\underline{w}_m) \\ &= (a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n)\underline{w}_1 + \cdots + (a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n)\underline{w}_m \end{aligned}$$

Dunque

$$(F(\underline{v}))_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = F_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} \ \underline{v}_{\mathcal{B}}$$

Caso particolare. Nel caso di un codominio $\mathbb{R}^m$ con base canonica $\mathcal{C}'$ e di un dominio $\mathbb{R}^n$ con base canonica $\mathcal{C}$, La matrice di un'applicazione lineare $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ rispetto alle basi canoniche è la matrice $m \times n$ che ha per colonne le immmagini in $\mathbb{R}^m$ dei vettori della base canonica di $\mathbb{R}^n$ :

$$F_{\mathcal{C}'\mathcal{C}} = (F\underline{e}_1 \ \cdots \ F\underline{e}_n)$$

e la relazione fondamentale diviene

$$F\underline{v} = F_{\mathcal{C}'\mathcal{C}} \ \underline{v}, \quad \forall \underline{v} \in \mathbb{R}^n.$$

Si ritrovano così le matrici usate in precedenza per rappresentare applicazioni lineari fra spazi di ennuple.

Possiamo allora riformulare il problema iniziale nella forma seguente. La matrice di $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ rispetto alla basi date è

$$F_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

e si vuole determinare la matrice $F_{\mathcal{C}',\mathcal{C}}$ di $F$ rispetto alle basi canoniche $\mathcal{C}', \mathcal{C}$.

### Composizione di applicazioni lineari e prodotto di matrici

Proposizione. Siano $F : V \to W$ e $G : W \to Z$ applicazioni lineari fra spazi vettoriali $V, W, Z$ con basi ordinate rispettivamente $\mathcal{B}, \mathcal{B}', \mathcal{B}''$. Allora la matrice dell'applicazione composta $G \circ F$ è il prodotto della matrice di $G$ per la matrice di $F$ (rispetto alle dovute basi):

$$(G \circ F)_{\mathcal{B}''\mathcal{B}} = G_{\mathcal{B}''\mathcal{B}'} F_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}.$$

Dimostrazione. Per ogni $\underline{v} \in V$ si ha:

$$((G \circ F)\underline{v})_{\mathcal{B}''} = (G \circ F)_{\mathcal{B}''\mathcal{B}} \ \underline{v}_{\mathcal{B}}$$

e

$$(G(F\underline{v}))_{\mathcal{B}''} = G_{\mathcal{B}''\mathcal{B}'} \ (F\underline{v})_{\mathcal{B}'} = G_{\mathcal{B}''\mathcal{B}'} \ F_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} \ \underline{v}_{\mathcal{B}}.$$

Dunque per ogni $\underline{v} \in V$ si ha

$$(G \circ F)_{\mathcal{B}''\mathcal{B}} \ \underline{v}_{\mathcal{B}} = G_{\mathcal{B}''\mathcal{B}'} F_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} \ \underline{v}_{\mathcal{B}},$$

e da ciò segue la tesi.

### Matrici cambiamento di base

La matrice che rappresenta l'identità $\mathrm{id} : V \to V$ di uno spazio vettoriale $V$ rispetto a basi $\mathcal{B}' : \underline{w}_1, \ldots, \underline{w}_n$ e $\mathcal{B} : \underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n$ è la matrice che ha nelle colonne le coordinate rispetto a $\mathcal{B}'$ dei vettori di $\mathcal{B}$

$$\mathrm{id}_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} = ((\underline{v}_1)_{\mathcal{B}'} \ \cdots \ (\underline{v}_n)_{\mathcal{B}'})\,;$$

per ogni vettore $\underline{v}$ di $V$, la colonna coordinata di $\underline{v}$ rispetto a $\mathcal{B}'$ è il prodotto di questa matrice per la colonna coordinata di $\underline{v}$ rispetto a $\mathcal{B}$

$$\underline{v}_{\mathcal{B}'} = \mathrm{id}_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} \ \underline{v}_{\mathcal{B}}.$$

Per questa ragione la matrice $\mathrm{id}_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}$ si dice "matrice del cambiamento di base" verso $\mathcal{B}'$ da $\mathcal{B}$.

Caso particolare. La matrice del cambiamento di base verso la base canonica $\mathcal{C}$ da una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^n$ è la matrice che ha nelle colonne i vettori di $\mathcal{B}$

$$\mathrm{id}_{\mathcal{CB}} = (\underline{v}_1 \ \cdots \ \underline{v}_n)\,.$$

Fatto. La matrice di cambiamento di base relativa a due basi uguali di uno spazio vettoriale di dimensione $n$ è una matrice unità di ordine $n$. In simboli:

$$\mathrm{id}_{\mathcal{BB}} = \mathrm{I}_n.$$

Fatto. Le due matrici di cambiamento fra due basi di uno spazio vettoriale sono l'una l'inversa dell'altra; in simboli:

$$\mathrm{id}_{\mathcal{BA}} = (\mathrm{id}_{\mathcal{AB}})^{-1}.$$

Infatti, indicata con $n$ la dimensione dello spazi vettoriale, si ha

$$\begin{aligned} \mathrm{id}_{\mathcal{BA}}\mathrm{id}_{\mathcal{AB}} &= \mathrm{id}_{\mathcal{BB}} = \mathrm{I}_n \\ \mathrm{id}_{\mathcal{AB}}\mathrm{id}_{\mathcal{BA}} &= \mathrm{id}_{\mathcal{AA}} = \mathrm{I}_n \end{aligned}$$

**Relazione fra le matrici che rappresentano una stessa applicazione lineare**

Proposizione. Siano:

$V$ uno spazio vettoriale con due basi ordinate $\mathcal{A}, \mathcal{B}$;

$W$ uno spazio vettoriale con due basi ordinate $\mathcal{A}', \mathcal{B}'$;

$F : V \to W$ un'applicazione lineare.

Allora la matrice di $F$ rispetto a $\mathcal{B}', \mathcal{B}$ è uguale al prodotto della matrice del cambiamento verso $\mathcal{B}'$ da $\mathcal{A}'$ per la matrice di $F$ rispetto ad $\mathcal{A}', \mathcal{A}$ per la matrice del cambiamento verso $\mathcal{A}$ da $\mathcal{B}$ :

$$F_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} = \mathrm{id}_{\mathcal{B}'\mathcal{A}'} F_{\mathcal{A}'\mathcal{A}} \mathrm{id}_{\mathcal{AB}}$$

Dimostrazione.

$$F_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} = (\mathrm{id} \circ F \circ \mathrm{id})_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} = \mathrm{id}_{\mathcal{B}'\mathcal{A}'} F_{\mathcal{A}'\mathcal{A}} \mathrm{id}_{\mathcal{AB}}$$

Casi particolari. Siano $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ basi ordinate rispetivamente di $\mathbb{R}^n$ ed $\mathbb{R}^m$ ed $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ un'applicazione lineare. Allora

$$\begin{aligned} F_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} &= \mathrm{id}_{\mathcal{B}'\mathcal{C}'} F_{\mathcal{C}'\mathcal{C}} \mathrm{id}_{\mathcal{CB}} = (\mathrm{id}_{\mathcal{C}'\mathcal{B}'})^{-1} F_{\mathcal{C}'\mathcal{C}} \mathrm{id}_{\mathcal{CB}} \\ F_{\mathcal{C}'\mathcal{C}} &= \mathrm{id}_{\mathcal{C}'\mathcal{B}'} F_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} \mathrm{id}_{\mathcal{BC}} = \mathrm{id}_{\mathcal{C}'\mathcal{B}'} F_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} (\mathrm{id}_{\mathcal{CB}})^{-1} \end{aligned}$$

**Soluzione del problema iniziale**

$$\begin{aligned}
F_{\mathcal{C}'\mathcal{C}} &= \mathrm{id}_{\mathcal{C}'\mathcal{B}'} F_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} (\mathrm{id}_{\mathcal{C}\mathcal{B}})^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} 7 & 11 \\ 4 & 7 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Dunque

$$F \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

cioè

$$F(x, y) = (3x + 4y, x + 3y, x + y).$$

Verifica della correttezza. Basta provare che la $F$ che abbiamo trovato coincide con la $F$ data sui vettori della base $\mathcal{B}$, cioè che

$$\begin{aligned}
F(1, 1) &= (1, 0, 0) + 2(3, 2, 1) \\
F(1, 2) &= (2, 1, 0) + 3(3, 2, 1).
\end{aligned}$$

Queste uguaglianze sono soddisfatte (si lasciano i calcoli al lettore).