Lezione del 15.05

Matrici diagonali

Le matrici diagonali sono le matrici quadrate del tipo

$$(a), \quad \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}, \quad \ldots$$

dove $a, b, c, \ldots$ sono numeri reali. La matrice diagonale $n \times n$ con elementi diagonali $d_1, d_2, \ldots, d_n$ si indica in breve con

$$\operatorname{diag}(d_1, d_2, \ldots, d_n).$$

In altri termini, una matrice $D = (D_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$ è diagonale se $D_{ij} = 0$ per ogni $i \neq j$.

Le varie nozioni date per le matrici quadrate si semplificano notevolmente nel caso di matrici diagonali. Ad esempio:

- Per una matrice diagonale, il rango è il numero di elementi diagonali diversi da zero, e il determinate è il prodotto degli elementi diagonali.

- Il prodotto HK di due matrici diagonali H, K è ancora una matrice diagonale, e ciascun elemento diagonale di HK è il prodotto degli elementi diagonali omologhi di H e K.

Infatti, posto $H = (H_{ij})$ e $K = (K_{ij})$ $(i, j = 1, \ldots, n)$, tenendo conto che H è diagonale, si ha

$$(HK)_{ij} = H_{i1}K_{1j} + H_{i2}K_{2j} + \cdots + H_{in}K_{nj} = H_{ii}K_{ij}$$

Dunque:

-per ogni $i \neq j$ si ha $(HK)_{ij} = H_{ii}0 = 0$

-per ogni $i = j$ si ha $(HK)_{ii} = H_{ii}K_{ii}$.

Endomorfismo diagonalizzabile, autovettori ed autovalori.

Dato un endomorfismo F di $\mathbb{R}^n$, per ciascuna base ordinata $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^n$ consideriamo la matrice $F_{\mathcal{B}\mathcal{B}}$, in breve $F_{\mathcal{B}}$, di F rispetto alla base $\mathcal{B}$ sia nel dominio che nel codominio. Tutte le basi che consideriamo si intendono ordinate.

Definizione. Diciamo che F è "diagonalizzabile" se esiste una base $\mathcal{B}$ tale che la matrice F_B sia diagonale. Nel dettaglio, ciò significa che esiste una base $\mathcal{B}$: $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n$ di $\mathbb{R}^n$ tale che

$$F(\underline{v}_1) = d_1\underline{v}_1, \ \ldots, \ F(\underline{v}_n) = d_n\underline{v}_n$$

e dunque

$$F_{\mathcal{B}} = \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_n).$$

Per ciascuna base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^n$ e ciascuna matrice diagonale D esiste uno ed un solo endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ che rispetto a $\mathcal{B}$ è rappresentato da D. In questo modo si ottengono tutti e soli gli endomorfismi diagonalizzabili di $\mathbb{R}^n$. Ci si pone il problema inverso: dato un endomorfismo T di $\mathbb{R}^n$ mediante la matrice rispetto alla base canonica, determinare se possibile una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^n$ tale che $T_{\mathcal{B}}$ sia diagonale.

Esempio. Esiste uno ed un solo endomorfismo G di $\mathbb{R}^2$ che rispetto alla base $\mathcal{B}$: $(1,2),(1,3)$ di $\mathbb{R}^2$ è rappresentato dalla matrice diagonale

$$G_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

G è rappresentato rispetto alla base canonica $\mathcal{C}$ dalla matrice

$$\begin{aligned} G_{\mathcal{C}} &= \mathrm{id}_{\mathcal{C}\mathcal{B}} G_{\mathcal{B}} \mathrm{id}_{\mathcal{B}\mathcal{C}} \\ &= \mathrm{id}_{\mathcal{C}\mathcal{B}} G_{\mathcal{B}} \left(\mathrm{id}_{\mathcal{C}\mathcal{B}}\right)^{-1} \end{aligned}$$

specificamente

$$\begin{aligned} G_{\mathcal{C}} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -6 & 7 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ci chiediamo: dimenticando come è stato costruito G, e consiederando G definito solo tramite $G_{\mathcal{C}}$, fino a che punto possiamo recuperare la base $\mathcal{B}$? e gli elementi della matrice diagonale?

Affiniamo il linguaggio introducendo i concetti di autovettore ed autovalore. Sia T un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$.

Definizione I (con accento su autovettore). Un vettore non nullo $\underline{v}$ di $\mathbb{R}^n$ si dice "autovettore" di T se esiste uno scalare λ tale che

$$T(\underline{v}) = \lambda \underline{v}.$$

In tal caso, λ è univocamente determinato da $\underline{v}$, e si dice "l'autovalore" di T associato a $\underline{v}$.

(Se $T(\underline{v}) = \lambda\underline{v}$ e $T(\underline{v}) = \mu\underline{v}$ allora $\lambda\underline{v} = \mu\underline{v}$ e, essendo $\underline{v} \neq \underline{0}$, ... si trova $\lambda = \mu$.)

Definzione II (con accento su autovalore). Uno scalare λ si dice "autovalore" di T se esiste un vettore non nullo $\underline{v}$ di $\mathbb{R}^n$ tale che

$$T(\underline{v}) = \lambda \underline{v}.$$

In tal caso, $\underline{v}$ si dice "un autovettore" di T associato a λ. L'insieme di tutti gli autovettori di T associati a λ, con l'aggiunta del vettore nullo, è un sottospazio di $\mathbb{R}^n$, che si dice "autospazio" di T associato a λ e si indica con V_λ. In simboli:

$$V_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^n : \ T(x) = \lambda x\}.$$

(V_λ è chiuso rispetto alla somma: se $T(\underline{v}_1) = \lambda\underline{v}_1$ e $T(\underline{v}_2) = \lambda\underline{v}_2$ allora

$$T(\underline{v}_1 + \underline{v}_2) = T(\underline{v}_1) + T(\underline{v}_2) = \lambda\underline{v}_1 + \lambda\underline{v}_2 = \lambda(\underline{v}_1 + \underline{v}_2).$$

V_λ è chiuso rispetto al prodotto per scalari: se $T(\underline{v}) = \lambda\underline{v}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ allora

$$T(\alpha\underline{v}) = \alpha T(\underline{v}) = \alpha\lambda\underline{v} = \lambda(\alpha\underline{v}).$$

V_λ non e vuoto in quanto contiene $\underline{0}$ (anche qualche vettore $\neq \underline{0}$).)

Significato geometrico. Nel caso di un endomorfismo T dello spazio vettoriale $\mathcal{V}_o^2$ o $\mathcal{V}_o^3$, la condizione

$$T(\underline{v}) = \lambda\underline{v} \quad (\underline{v} \neq \underline{0})$$

significa che T trasforma $\underline{v}$ in un vettore che sta sulla stessa retta di $\underline{v}$; in altri termini: T annulla $\underline{v}$ oppure manda $\underline{v}$ in un vettore che ha la stessa direzione di $\underline{v}$ (modifica il verso di $\underline{v}$ se $\lambda < 0$ e modifica la lunghezza di $\underline{v}$ per il fattore $|\lambda|$).

Proposizione. Per un endomorfismo T di $\mathbb{R}^n$, una base $\mathcal{B}: \ \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ di $\mathbb{R}^n$, ed una sequenza $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ di scalari, sono equivalenti le seguenti affermazioni:

- la matrice $T_{\mathcal{B}}$ è la matrice diagonale con elementi diagonali λ_i $(i = 1, \dots, n)$;

- ciascun vettore $\underline{v}_i$ è un autovettore di T con autovalore associato λ_i $(i = 1, \dots, n)$.

In particolare: T è diagonalizzabile se e solo se esiste una base di $\mathbb{R}^n$ di autovettori di T.

Dimostrazione. La proposizione segue direttamente dalle definzioni.

Di seguito mostriamo come, usando autovalori ed autovettori, si possa affrontare il problema posto nel caso dell'esempio.

Esempio. Consideriamo l'endomorfismo G di $\mathbb{R}^2$ dato da

$$G(\underline{x}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -6 & 7 \end{pmatrix} \underline{x}, \quad (\underline{x} \in \mathbb{R}^2).$$

Cerchiamo prima gli autovalori. Uno scalare λ è un autovalore di G se e solo se esiste un vettore non nullo che è trasformato da G in λ per sè stesso, cioè se e solo se il sistema lineare

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -6 & 7 \end{pmatrix} \underline{x} = \lambda\underline{x}, \qquad \begin{cases} 2x + y = \lambda x \\ -6x + 7y = \lambda y \end{cases}$$

ha qualche soluzione $\underline{x} = (x, y) \neq \underline{0}$. Questo sistema si riscrive

$$\begin{cases} (2-\lambda)x + y = 0 \\ -6x + (7-\lambda)y = 0 \end{cases},$$

è lineare omogeneo, ed ha qualche soluzione $\neq \underline{0}$ se e solo se il determinante della matrice dei coefficienti è nullo:

$$det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ -6 & 7-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

cioè λ è una soluzione dell'equazione

$$\lambda^2 - 9\lambda + 20 = 0.$$

Risolvendo questa equazine si trova che G ha esattamente due autovalori: $\lambda_1 = 4$ e $\lambda_2 = 5$. Dunque G può essere rappresentata solo da matrici diagonali con elementi diagonali presi nell'insieme $\{4, 5\}$.

L'autospazio associato all'autovalore $\lambda_1 = 4$ è $V_4 = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^2 : \ G(\underline{x}) = 4\underline{x}\}$, l'insieme delle soluzioni del sistema

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -6 & 7 \end{pmatrix} \underline{x} = 4\underline{x}, \qquad \begin{cases} 2x + y = 4x \\ -6x + 7y = 4y \end{cases}$$

cioè del sistema

$$\begin{cases} -2x + y = 0 \\ -6x + 3y = 0 \end{cases}$$

cioè dell'equazione

$$-2x + y = 0.$$

La soluzione generale è $(x, 2x) = x(1, 2)$, $x \in \mathbb{R}$. Dunque l'autospazio V_4 è il sottospazio generato dal vettore $(1, 2)$:

$$V_4 = \langle (1, 2) \rangle$$

L'autospazio associato all'autovalore $\lambda_2 = 5$ è $V_5 = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^2 : \ G(\underline{x}) = 5\underline{x}\}$, l'insieme delle soluzioni del sistema

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -6 & 7 \end{pmatrix} \underline{x} = 5\underline{x}, \qquad \begin{cases} 2x + y = 5x \\ -6x + 7y = 5y \end{cases}$$

cioè del sistema

$$\begin{cases} -3x + y = 0 \\ -6x + 2y = 0 \end{cases}$$

cioè dell'equazione

$$-3x + y = 0.$$

La soluzione generale è $(x, 3x) = x(1, 3)$, $x \in \mathbb{R}$. Dunque l'autospazio V_5 è il sottospazio generato dal vettore $(1, 3)$:

$$V_5 = \langle (1, 3) \rangle.$$

$(1, 2), (1, 3)$ è una base ordinata di $\mathbb{R}^2$ di autovettori di G, e la matrice di G rispetto a questa base è la matrice diagonale

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

$(1, 3), (1, 2)$ è un'altra base ordinata di $\mathbb{R}^2$ di autovettori di G, e la matrice di G rispetto a questa base è la matrice diagonale

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Sostituendo ciascuno dei due vettori con un suo multiplo scalare non nullo si ottiene una nuova base ordinata di $\mathbb{R}^2$ di autovettori di G cui corrisponde la stessa matrice diagonale.

Esempio di un endomorfismo non diagonalizzabile. Consideriamo lo spazio vettoriale $\mathcal{V}_o^2$ dei vettori del piano euclideo applicati in un punto O. L'applicazione R di $\mathcal{V}_o^2$ in sè stesso che ruota ciascun vettore applicato in O di un certo angolo in un certo verso è lineare (informalmente: trasforma ciascuna configurazione in una ad essa congruente e dunque è compatibile con le operazioni sui vettori, che sono definite geometricamente). Tranne che nel caso di un angolo nullo o piatto, R manda ciascun vettore in un vettore con una direzione diversa, dunque R non ha alcun autovettore e non è diagonalizzabile. Di seguito mostriamo la controparte più propriamente algebrica di queste considerazioni. Per semplicità, supponiamo che R sia la rotazione di un angolo retto in verso antiorario.

Identifichiamo $\mathcal{V}_o^2$ ed $\mathbb{R}^2$ fissando nel piano un sistema di riferimento cartesiano ortogonale monometrico destrorso (cioè tale che l'angolo dal primo asse al secondo sia retto in senso antiorario). Allora l'endomorfismo R di $\mathcal{V}_o^2$ viene identificato con l'endomorfismo di $\mathbb{R}^2$ che sui vettori della base canonica assume i valori $R(\underline{e}_1) = \underline{e}_2$, $R(\underline{e}_2) = -\underline{e}_1$, da cui si ottiene

$$R(x, y) = (-y, x).$$

Cerchiamo gli autovalori. Uno scalare λ è un autovalore di R se e solo se esiste un vettore non nullo (x, y) tale che $R(x, y) = \lambda(x, y)$, cioè se e solo se il sistema lineare

$$\begin{cases} -y = \lambda x \\ \ \ x = \lambda y \end{cases}$$

ha qualche soluzione $\neq (0, 0)$. Questo sistema si riscrive

$$\begin{cases} -\lambda x - y = 0 \\ \ \ x - \lambda y = 0 \end{cases},$$

è lineare omogeneo, ed ha qualche soluzione $\neq (0, 0)$ se e solo se il determinante della matrice dei coefficienti è nullo:

$$det \begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = 0$$

cioè λ è una soluzione dell'equazione

$$\lambda^2 + 1 = 0.$$

Questa equazione non ha alcuna soluzione in $\mathbb{R}$, dunque R non ha alcun autovalore reale e non è diagoonalizzabile.

Segnaliamo che ampliando il campo dai reali ai complessi, R diviene un endomorfismo di $\mathbb{C}^2$ che ha i due autovalori i e $-i$ ... e come endomorfismo di $\mathbb{C}^2$ risulta essere diagonalizzabile.

Polinomio caratteristico.

Teorema. Sia T un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$, $T(\underline{x}) = A\underline{x}$ ($\underline{x} \in \mathbb{R}^n$). Uno scalare λ è un autovalore di T se e solo se

$$\det(A - \lambda I_n) = 0.$$

Dimostrazione. Uno scalare λ è un autovalore di T se e solo se il sistema lineare di n equazioni in n incognite

$$A\underline{x} = \lambda\underline{x},$$

ha qualche soluzione $\underline{x} \neq \underline{0}$. Questo sistema si riscrive $A\underline{x} - \lambda\underline{x} = \underline{0}$, meglio

$$(A - \lambda \mathrm{I}_n)\underline{x} = \underline{0},$$

ed è lineare omogeneo. Per il caso particolare del teorema sulle proprietà delle matrici quadrate, questo sistema ha qualche soluzione $\underline{x} \neq \underline{0}$ se e solo se la matrice dei coefficienti ha determinante nullo:

$$\det(A - \lambda \mathrm{I}_n) = 0.$$

Esempio. Sia T il generico endomorfismo di $\mathbb{R}^2$, $T(\underline{x}) = A\underline{x}$ ($\underline{x} \in \mathbb{R}^2$), dove

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Si ha

$$\begin{aligned} A - \lambda \mathrm{I}_2 &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda \mathrm{I}_2) &= \det \begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (a-\lambda)(d-\lambda) - bc \\ &= \lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc \end{aligned}$$

Abbiamo ottenuto un polinomio di II grado, il coefficiente di λ^2 è 1, il coefficiente di λ è la somma degli elementi diagonali di A e il termine costante è il determinate di A.

Gli autovalori di T sono dunque le soluzioni dell'equazine di II grado

$$\lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc = 0;$$

in particolare, sono al più due.

La somma degli elementi diagonali di una matrice quadrata A si dice "traccia" di A e si indica con $\mathrm{tr}(A)$: in simboli, per

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

si ha

$$\mathrm{tr}(A) = a_{11} + \cdots + a_{nn}.$$

Definzione. Sia T un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$, $T(\underline{x}) = A\underline{x}$ $(\underline{x} \in \mathbb{R}^n)$. La matrice

$$A - \lambda \mathrm{I}_n \quad (\lambda \text{ variabile})$$

si dice "matrice caratteristica" di A (in λ).

Proposizione. Il determinante della matrice caratteristica $A - \lambda \mathrm{I}_n$ di una matrice A $n \times n$ è polinomio nella variabile λ. Ha grado n ed è del tipo

$$\det(A - \lambda \mathrm{I}_n) = (-1)^n(\lambda^n - c_1\lambda^{n-1} + c_2\lambda^{n-2} + \cdots + (-1)^n c_n)$$

dove $c_1 = \mathrm{tr}(A)$ e $c_n = \det(A)$.

Di conseguenza, si ha la

Proposizione. Un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ ha al più n autovalori distinti.

Definizione. Il determinate della matrice caratteristica di una matrice A si dice "polinomio caratteristico" di A e si indica con $\mathrm{p}_A(\lambda)$:

$$\mathrm{p}_A(\lambda) = \det(A - \lambda \mathrm{I}_n).$$