Lezione del 16.05

Problema della diagonalizzazione. Dato un endomorfismo T di $\mathbb{R}^n$, $T(\underline{x}) = A\underline{x}$ ($\underline{x} \in \mathbb{R}^n$), si vuole determinare se possibile una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^n$ tale che $T_{\mathcal{B}}$ sia diagonale, cioè una base di $\mathbb{R}^n$ di autovettori di T. Per definizione, un vettore $\underline{v} \neq \underline{0}$ di $\mathbb{R}^n$ ed uno scalre $\lambda \in \mathbb{R}$ sono un autovettore ed un autovalore (fra loro associati) di T tali che

$$T(\underline{v}) = \lambda\underline{v}$$

o, in termini matriciali, tali che

$$A\underline{v} = \lambda\underline{v} \quad \text{cioè} \quad (A - \lambda I_n)\underline{v} = \underline{0}.$$

Un primo procedimento grezzo di risoluzione (funziona bene per $n = 2$):

-Primo passo. Si determinano gli autovalori di T come radici del polinomio caratteristico (più avanti vedremo quanto è problematico questo passo nel caso generale)

$$\mathrm{p}_A(\lambda) = \det(A - \lambda \mathrm{I}_n) = 0;$$

se non si trovano autovalori, allora T non è diagonalizzabile; supponiamo che si trovino esattamente p autovalori distinti $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ (deve essere $p \leq n$.)

-Secondo passo. Per ciascun autovalore λ_i si determina il corrispondente autospazio

$$V_{\lambda_i} = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n : \ A\underline{x} = \lambda_i\underline{x}, \ \text{cioè } (A - \lambda_i \mathrm{I}_n)\underline{x} = \underline{0}\}$$

-Terzo passo. Si cerca di costruire una base di $\mathbb{R}^n$ prendendo vettori negli autospazi.

Esempio. Sia F l'endomorfismo di $\mathbb{R}^2$ dato da $F(\underline{x}) = A\underline{x}$ ($\underline{x} \in \mathbb{R}^2$) con

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

La matrice caratteristica di A è

$$A - \lambda I_2 = \begin{pmatrix} 4-\lambda & 1 \\ 2 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

ed il polinomio caratteristico è

$$\mathrm{p}_A(\lambda) = det(A - \lambda I_2) = (4-\lambda)(3-\lambda) - 2 = \lambda^2 - 7\lambda + 10.$$

Gli autovalori di T sono le soluzioni dell'equazione

$$\lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0;$$

risolvendo si trova $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 5$.

L'autospazio V_2 è l'insieme delle soluzioni del sistema $A\underline{x} = 2\underline{x}$ cioè del sistema $(A - 2I_2)\underline{x} = \underline{0}$, specificamente

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \underline{x} = \underline{0}$$

questo sistema equivale all'unica equazione

$$2x + y = 0,$$

che ha soluzione generale $(x, -2x) = x(1, -2)$, $x \in \mathbb{R}$. Dunque V_2 è il sottospazio di $\mathbb{R}^2$ generato dal vettore $(1, -2)$:

$$V_2 = \langle (1, -2) \rangle.$$

L'autospazio V_5 è l'insieme delle soluzioni del sistema $A\underline{x} = 5\underline{x}$ cioè del sistema $(A - 5I_2)\underline{x} = \underline{0}$, specificamente

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \underline{x} = \underline{0}$$

questo sistema equivale all'unica equazione

$$x - y = 0,$$

che ha soluzione generale $(x, x) = x(1, 1)$, $x \in \mathbb{R}$. Dunque V_5 è il sottospazio di $\mathbb{R}^2$ generato dal vettore $(1, 1)$:

$$V_5 = \langle (1, 1) \rangle.$$

Prendendo nell'ordine un vettore non nullo in V_2 ed un vettore non nullo in V_5 si hanno due vettori linearmente indipendenti, dunque una base di $\mathbb{R}^2$; la matrice di T rispetto a questa base è

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Scambiando l'ordine dei due vettori si ottengono altre basi ordinate di $\mathbb{R}^2$ di autovettori di T, e la matrice di T rispetto a ciascuna di queste basi è la matrice diagonale con gli elementi diagonali scambiati. Non ci sono altre basi di $\mathbb{R}^2$ di autovettori di T e dunque non ci sono altre matrici diagonali che rappresentano T.

Esempio. Sia G l'endomorfismo di $\mathbb{R}^2$ dato da $G(\underline{x}) = A\underline{x}$ ($\underline{x} \in \mathbb{R}^2$) con

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

La matrice caratteristica di A è

$$A - \lambda I_2 = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 0 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

ed il polinomio caratteristico è

$$\mathrm{p}_A(\lambda) = det(A - \lambda I_2) = (2 - \lambda)^2.$$

Gli autovalori di G sono le soluzioni dell'equazione

$$(2 - \lambda)^2 = 0;$$

cioè $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$.

L'autospazio V_2 è l'insieme delle soluzioni del sistema $A\underline{x} = 2\underline{x}$ cioè del sistema $(A - 2I_2)\underline{x} = \underline{0}$, specificamente

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \underline{x} = \underline{0}$$

questo sistema equivale all'unica equazione

$$y = 0,$$

che ha soluzione generale $(x, 0) = x(1, 0)$, $x \in \mathbb{R}$. Dunque V_2 è il sottospazio di $\mathbb{R}^2$ generato dal vettore $(1, 0)$:

$$V_2 = \langle (1, 0) \rangle.$$

Non ci sono due autovettori di T linearmente indipendenti, dunque G non possiede due autovettori che formino una base di $\mathbb{R}^2$. Ampliando il campo da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}$ si ha un endomorfismo di $\mathbb{C}^2$ che è ancora non diagonalizzabile.

Esempio. Sia H l'endomorfismo di $\mathbb{R}^2$ dato da $H(\underline{x}) = A\underline{x}$ ($\underline{x} \in \mathbb{R}^2$) con

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

La matrice A è diagonale, dunque H possiede due autovettori che formano una base di $\mathbb{R}^2$, i due vettori della base canonica. In realtà si ha di più. Per ogni (x, y) in $\mathbb{R}^2$ si ha

$$H(x, y) = (2x, 2y) = 2(x, y).$$

cioè ogni vettore non nullo di $\mathbb{R}^2$ è un autovettore di H con autovalore 2, quindi ogni base di $\mathbb{R}^2$ è di autovettori di H e la matrice di H rispetto ad essa è sempre

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Autovettori associati ad autovalori distinti

Nei (pochi) esempi visti accade sempre che ad autovalori distinti corrispondano autovettori indipendenti. Più in generale si ha il

Teorema. Siano T un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ e $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ autovalori di T con autovettori associati $v_1, \dots, v_p$. Se $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sono a due a due distinti, allora $v_1, \dots, v_p$ sono linearmente indipendenti.

Dimostrazione. Idea, casi $p = 1, 2, 3$.

Caso $p = 1$. La tesi segue dal fatto che ogni autovettore è per defінzione non nullo.

Caso $t = 2$. Siano λ_1, λ_2 due autovalori distinti di T cui sono associati due autovettori $\underline{v}_1, \underline{v}_2$. Consideriamo un'uguaglianza

$$\alpha\underline{v}_1 + \beta\underline{v}_2 = \underline{0}. \tag{1}$$

Applicando T ad entrambi i membri si ottiene l'uguaglianza

$$\alpha\lambda_1\underline{v}_1 + \beta\lambda_2\underline{v}_2 = \underline{0}. \tag{2}$$

Sottraendo dalla seconda uguaglianza λ_1 la prima uguaglianza si ottiene

$$(\lambda_2 - \lambda_1)\beta\underline{v}_2 = \underline{0};$$

da questa, essendo $\underline{v}_2 \neq \underline{0}$, si ottiene $(\lambda_2 - \lambda_1)\beta = 0$ ed essendo $\lambda_2 - \lambda_1 \neq 0$ infine si ottiene $\beta = 0$. Dunque la prima uguaglianza diviene

$$\alpha\underline{v}_1 = \underline{0};$$

da questa, essendo $\underline{v}_1 \neq \underline{0}$, si ottiene $\alpha = 0$.

Caso $t = 3$. Siano $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ autovalori a due a due distinti di T cui sono associati gli autovettori $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$. Consideriamo un'uguaglianza

$$\alpha\underline{v}_1 + \beta\underline{v}_2 + \gamma\underline{v}_3 = \underline{0}. \tag{3}$$

Applicando T ad entrambi i membri si ottiene l'uguaglianza

$$\alpha\lambda_1\underline{v}_1 + \beta\lambda_2\underline{v}_2 + \gamma\lambda_3\underline{v}_3 = \underline{0}. \tag{4}$$

Sottraendo dalla seconda uguaglianza λ_1 la prima uguaglianza si ottiene

$$(\lambda_2 - \lambda_1)\beta\underline{v}_2 + (\lambda_3 - \lambda_1)\gamma\underline{v}_3 = \underline{0};$$

da questa, essendo per il punto precedente $\underline{v}_2, \underline{v}_3$ linearmente indipendenti, si ottiene $(\lambda_2 - \lambda_1)\beta = (\lambda_3 - \lambda_1)\gamma = 0$ ed essendo $\lambda_2 - \lambda_1 \neq 0$ e $\lambda_3 - \lambda_1 \neq 0$ infine si ottiene $\beta = \gamma = 0$. Dunque la prima uguaglianza diviene

$$\alpha\underline{v}_1 = \underline{0};$$

da questa, essendo $\underline{v}_1 \neq \underline{0}$, si ottiene $\alpha = 0$.

Dal Teorema precedente segue direttamente il:

Teorema. Sia T un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ con n autovalori distinti $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ e siano $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n$ autovettori associati. Allora $\mathcal{B}$: $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n$ è una base di $\mathbb{R}^n$ e $T_{\mathcal{B}} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. In breve: un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ con n autovalori distinti è diagonalizzabile.

Esercizio. Sia T l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$, $T(\underline{x}) = A\underline{x}$ ($\underline{x} \in \mathbb{R}^3$) con

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Si determini se possibile una base di $\mathbb{R}^3$ di autovettori di T e la matrice di T rispetto a tale base.

La matrice caratteristica di A è

$$A - \lambda I_3 = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 4-\lambda \end{pmatrix}$$

ed il polinomio caratteristico è

$$\mathrm{p}_A(\lambda) = \det(A - \lambda \mathrm{I}_3) = (2-\lambda)^2(4-\lambda) - (4-\lambda) = ((2-\lambda)^2 - 1)(\lambda - 4) = (1-\lambda)(3-\lambda)(4-\lambda).$$

Gli autovalori di T sono $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_2 = 4$. Dunque T è diagonalizzabile.

L'autospazio V_1 è l'insieme delle soluzioni del sistema $A\underline{x} = \underline{x}$ cioè del sistema $(A - I_3)\underline{x} = \underline{0}$, specificamente

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \underline{x} = \underline{0}$$

questo sistema equivale al sistema di due equazioni

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

che ha soluzione generale

$$(y, -y, 0) = y(1, -1, 0), \quad y \in \mathbb{R}.$$

In altri termini V_1 è il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ generato dal vettore $(1, -1, 0)$.

L'autospazio V_3 è l'insieme delle soluzioni del sistema $A\underline{x} = 3\underline{x}$ cioè del sistema $(A - 3I_3)\underline{x} = \underline{0}$, specificamente

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underline{x} = \underline{0}$$

questo sistema equivale al sistema di due equazioni

$$\begin{cases} -x + y + z = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

che ha soluzione generale

$$(y, y, 0) = y(1, 1, 0), \quad y \in \mathbb{R}.$$

In altri termini V_2 è il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ generato dal vettore $(1, 1, 0)$.

L'autospazio V_4 è l'insieme delle soluzioni del sistema $A\underline{x} = 4\underline{x}$ cioè del sistema $(A - 4I_3)\underline{x} = \underline{0}$, specificamente

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underline{x} = \underline{0}$$

questo sistema equivale al sistema di due equazioni

$$\begin{cases} x - 2y + 2z = 0 \\ -3y + 5z = 0 \end{cases}$$

che ha soluzione generale

$$(4/3z, 5/3z, z) = z(4/3, 5/3, 1), \quad z \in \mathbb{R}.$$

In altri termini V_4 è il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ generato dal vettore $(4/3, 5/3, 1)$.

Essendo $(1, -1, 0), (1, 1, 0), (4/3, 5/3, 1)$ autovettori associati ad autovalori distinti 1, 2, 4, sono linearmente indipendenti, dunque sono una base di $\mathbb{R}^3$. La matrice che rappresenta T rispetto a questa base è

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Permutando i tre vettori si ottengono 6 basi di $\mathbb{R}^3$ di autovettori, cui corrispondono 6 matrici diagonali. Per ciascuna di queste basi, moltiplicando i vettori per scalari non nulli si ottiene ancora una base di $\mathbb{R}^3$ cui corrisponde la stessa matrice diagonale. Non vi sono altre basi di $\mathbb{R}^3$ di autovettori di T, dunque non vi sono altre matrici diagonali che rappresentano T.