XI settimana - esercizi

(1) È dato l'endomorfismo F di $\mathbb{R}^2$ tale che $F(\underline{e}_1) = \underline{e}_1 + 3\underline{e}_3$, $F(\underline{e}_2) = 2\underline{e}_1 + 2\underline{e}_3$. Si determinino (se esistono) tutte le matrici diagonali che rappresentano F rispetto a qualche base di $\mathbb{R}^2$, indicando per ciascuna matrice una base.

(2) È dato l'endomorfismo G di $\mathbb{R}^2$ tale che $G(x, y) = (3x - y, x + y)$. Si determni (se esiste) una base di $\mathbb{R}^2$ rispetto alla quale G sia rappresentato da una matrice diagonale.

(3) È dato l'endomorfismo H di $\mathbb{R}^2$ che è rappresentato rispetto alla base canonica dalla matrice $H_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ Si stabilisca se H è diagonalizzabile.

(4) Sia T l'endomorfismo di $\mathbb{R}^2$ che ha autovalori 1 e -1 con autovettori rispettivi $(1, 2)$ e $(3, 4)$; si determini l'immagine $T(x, y)$ del generico vettore (x, y) di $\mathbb{R}^2$.

(5) Per ciascuno dei seguenti endomorfismi di $\mathbb{R}^3$ si determini se possibile una base di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori e la matrice dell'endomordfismo rispetto a tale base.

$$F(\underline{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underline{x} \quad (\underline{x} \in \mathbb{R}^3) \qquad \text{(uno degli esercizi del testo)}$$

$$G(\underline{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \underline{x} \quad (\underline{x} \in \mathbb{R}^3)$$

$$H(\underline{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \underline{x} \quad (\underline{x} \in \mathbb{R}^3)$$