Lezione del 22.05

Polinomi ed equazioni polinomiali.

Abbiamo visto che il polinomio caratteristico di un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ è un polinomio di grado n, e il coefficiente del termine di grado massimo è 1 o -1 (secondo che n sia pari o dispari). Nei casi che consideriamo, spesso la matrice dell'endomorfismo rispetto alla base canonica ha elementi interi, e questo implica che i coefficienti del polinomio sono interi.

La prima proposizione su polinomi e radici è il seguente

Teorema (di Ruffini). Un polinomio $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ ha una radice $r \in \mathbb{R}$ se e solo se $p(x)$ è divisibile per $x - r$, cioè $p(x)$ si può scrivere come

$$p(x) = q(x)(x - r),$$

con $q(x) \in \mathbb{R}[x]$ opportuno.

Questo Teorema ha una importante conseguenza:

Teorema. Un polinomio di grado n a coefficienti reali in una variabile x ha al più n radici.

Diamo un breve sguardo sulle formule risolutive per le equazioni polinomiali. Consideriamo un'equazione di grado $n(\geq 1)$ in una variabile x

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0 \qquad (a_n \neq 0).$$

Per $n = 1$ si ha una ed una sola soluzione, che si ricava direttamente. Per $n = 2$ si possono avere due soluzioni reali distinte, due soluzioni reali coincidenti oppure nessuna soluzione reale (due soluzioni distinte complesse coniugate), si possono distinguere i tre casi nei termini del segno del discriminante del trinomio, e si ha una formula per le soluzioni. Per $n = 3$ ed $n = 4$ si hanno ancora formule risolutive, sebbene più complicate. Per ciascun $n \geq 5$ si è provato nel XIX secolo che non può esistere alcuna formula risolutiva (questa affermazione va specificata).

Di seguito riportiamo alcune proposizioni sulle radici di polinomi aventi coefficienti interi con coefficiente del termine di grado massimo, in breve "coefficiente direttore", uguale a 1 o -1. Per semplicità le enunciamo e proviamo nel caso in cui il coefficiente direttore sia 1, in breve il polinomio sia "monico".

Proposizione. Sia $p(x)$ un polinomio monico a coefficienti interi

$$p(x) = x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \qquad (a_i \in \mathbb{Z}).$$

Se un numero razionale è radice di $p(x)$, allora è un numero intero.

Dimostrazione. Sia $q = \frac{a}{b}$ con $a, b \in \mathbb{Z}$ $(b \neq 0)$ una radice di $p(x)$; possiamo pensare che a e b siano coprimi (ciè privi di fattori comuni al di fuori di 1 e -1). Si ha

$$(\frac{a}{b})^n + a_{n-1}(\frac{a}{b})^{n-1} + \cdots + a_1 \frac{a}{b} + a_0 = 0;$$

moltiplicando entrambi i mebri per b^n si ha

$$a^n + a_{n-1} a^{n-1} b + \cdots + a_1 a b^{n-1} + a_0 b^n = 0.$$

Questa uguaglianza può essere riscritta

$$a^n = -(a_{n-1}a^{n-1} + \cdots + a_1 a b^{n-2} + a_0 b^{n-1})b;$$

ciò significa che b è un divisore di a^n, ed implica che ogni primo che divide b divide anche a. Essendo a e b coprimi, deve essere b uguale a 1 o -1. Dunque $q = \frac{a}{b}$ è in $\mathbb{Z}$.

Proposizione. Sia $p(x)$ un polinomio monico a coefficienti interi

$$p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \qquad (a_i \in \mathbb{Z}).$$

Se un numero intero è una radice di $p(x)$, allora è un divisore di a_0.

Dimostrazione. Sia $a \in \mathbb{Z}$ una radice di $p(x)$. Si ha

$$a^n + a_{n-1}a^{n-1} + \cdots + a_1 a + a_0 = 0.$$

Questa uguaglianza può essere riscritta

$$a_0 = -(a^{n-1} + a_{n-1}a^{n-2} + \cdots + a_1)a;$$

ciò significa che a è un divisore di a_0.

Sulla dimensione degli autospazi

Sia T un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$, $T(\underline{x}) = A\underline{x}$ ($\underline{x} \in \mathbb{R}^n$), e sia λ_0 un autovalore di T. L'autospazio V_{λ_0} è l'insieme dei vettori $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ tali che $A\underline{x} = \lambda_0 \underline{x}$, cioè l'insieme delle soluzioni del sistema lineare omogeneo $(A - \lambda_0 \mathrm{I})\underline{x} = 0$. Per quanto visto sulla dimensione dei sottospazi, lo spazio delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo ha dimensione uguale al numero delle incognite meno il rango della matrice dei coefficienti. Dunque

$$\dim(V_{\lambda_0}) = n - r(A - \lambda_0 \mathrm{I}).$$

Costruzione di basi di autovettori.

Si è visto che autovettori associati ad autovalori distinti sono linearmente indipendenti. Più in generale, si ha il seguente

Teorema. Sia T un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ e siano

$\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ autovalori distinti di T;

$\underline{v}_{11}, \ldots, \underline{v}_{1m_1}$ autovettori associati a λ_1, linearmente indipendenti,

$\vdots$

$\underline{v}_{p1}, \ldots, \underline{v}_{pm_p}$ autovettori associati a λ_p, linearmente indipendenti.

Allora

$$\begin{array}{c} \underline{v}_{11}, \ldots, \underline{v}_{1m_1} \\ \vdots \\ \underline{v}_{p1}, \ldots, \underline{v}_{pm_p} \end{array}$$

sono linearmente indipendenti.

Caso particolare:

Teorema. Sia T un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ e siano

$\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ (tutti e soli) gli autovalori distinti di T;

$\underline{v}_{11}, \ldots, \underline{v}_{1m_1}$ una base dell'autospazio V_{λ_1} associato a λ_1;

$\vdots$

$\underline{v}_{p1}, \ldots, \underline{v}_{pm_p}$ una base dell'autospazio V_{λ_p} associato a λ_p.

Se $\dim V_{\lambda_1} + \ldots + \dim V_{\lambda_p} = n$, allora

$$\begin{gathered}\underline{v}_{11}, \ldots, \underline{v}_{1m_1} \\ \vdots \\ \underline{v}_{p1}, \ldots, \underline{v}_{pm_p}\end{gathered}$$

è una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^n$ di autovettori di T. La matrice di T rispetto a $\mathcal{B}$ è la matrice diagonale

$$\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_1, \ldots, \lambda_p, \ldots, \lambda_p) \qquad \text{(con le dovute ripetizioni)}$$

Le matrici ottenute da questa permutando gli elementi diagonali sono tutte e sole le matrici diagonali che rappresentano T.

In breve:

Sia T un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ e siano $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ (tutti e soli) gli autovalori distinti di T; se $\dim V_{\lambda_1} + \ldots + \dim V_{\lambda_p} = n$, allora T è diagonalizzabile.

Esercizio. Sia T l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ dato da $T(\underline{x}) = A\underline{x}$ ($\underline{x} \in \mathbb{R}^3$) dove

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(1) Si stabilisca se T è diagonalizzabile. In tal caso: (2) si scrivano tutte le matrici diagonali che rappresentano T; (3) scelta una tale matrice diagonale D, si determini una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$ tale che $T_{\mathcal{B}} = D$.

Svolgimento. Il polinomio caratteristico di T è

$$\mathrm{p}_T(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 + 1 + 1 - (-\lambda - \lambda - \lambda) = -\lambda^3 + 3\lambda + 2.$$

Questo polinomio ha coefficienti interi e coefficiente direttore -1, quindi ciascuna eventuale sua radice razionale è un intero che divide 2, cioè $1, -1, 2, -2$.

Si ha

$$\mathrm{p}_T(-1) = 1 - 3 + 2 = 0,$$

cioè -1 è una radice di $\mathrm{p}_T(\lambda)$.

Per il Teorema di Ruffini, $\mathrm{p}_T(\lambda)$ è divisibile per $(\lambda - (-1)) = (\lambda + 1)$, cioè si può scrivere come

$$\mathrm{p}_T(\lambda) = -\lambda^3 + 3\lambda + 2 = (a\lambda^2 + b\lambda + c)(\lambda + 1), \qquad (a, b, c \in \mathbb{Z}).$$

Applicando la regola di Ruffini, oppure uguagliando i coefficienti ai due membri e risolvendo rispetto ad a, b, c, si ottiene

$$\mathrm{p}_T(\lambda) = (-\lambda^2 + \lambda + 2)(\lambda + 1)$$

Le radici di $\mathrm{p}_T(\lambda)$ sono dunque -1 e le radici del trinomio

$$-\lambda^2 + \lambda + 2$$

che si trovano essere, ad esempio con la formula risolutiva delle equazioni di II grado, -1 e 2.

In definitiva: le radici di $p_T(\lambda)$ sono:

$$-1 \text{ (due volte)},\ 2.$$

L'autospazio V_{-1} è l'insieme delle solzuioni di $A\underline{x} = -\underline{x}$ cioè l'insieme delle soluzioni del sistema lineare omogeneo $(A + \mathrm{I})\underline{x} = 0$, dove

$$A + \mathrm{I} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

La sua dimensione è

$$\dim(V_{-1}) = 3 - r(A + \mathrm{I}) = 3 - 1 = 2.$$

L'autospazio V_2 è l'insieme delle solzioni di $A\underline{x} = 2\underline{x}$ cioè l'insieme delle soluzioni del sistema lineare omogeneo $(A - 2\mathrm{I})\underline{x} = 0$, dove

$$A - 2\mathrm{I} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Applicando un processo di Gauss, oppure effettuando un paio di osservazioni, si trova che questa matrice ha rango 2. Dunque

$$\dim(V_2) = 3 - r(A - 2\mathrm{I}) = 3 - 2 = 1.$$

Riassumendo,

$$\dim(V_{-1}) + \dim(V_2) = 2 + 1 = 3$$

Per il Teorema precedente, T è diagonalizzabile, ed è rappresentato dalla matrice diagonale

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

e dalle altre due matrici ottenute permutando gli elementi diagonali.

L'autospazio V_{-1} è l'insieme delle soluzioni del sistema lineare omogeneo con matrice dei coefficienti $A + I$, cioè l'insieme delle soluzioni dell'equazione

$$x + y + z = 0;$$

cioè $x = -y - z$ con y, z libere in $\mathbb{R}$, cioè l'insieme dei vettori del tipo

$$(-y - z, y, z) = y(-1, 1, 0) + z(-1, 0, 1) \qquad (y, z \in \mathbb{R}).$$

Dunque questo sottospazio ha una base $(-1, 1, 0), (-1, 0, 1)$.

L'autospazio V_2 è l'insieme delle soluzioni del sistema lineare omogeneo con matrice dei coefficienti $A - 2I$, cioè l'insieme delle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases};$$

... cioè l'insieme dei vettori del tipo

$$(z, z, z) = z(1, 1, 1), \qquad (z \in \mathbb{R}).$$

Dunque questo sottospazio ha una base $(1, 1, 1)$.

Per il Teorema precedente, $\mathcal{B}: \ (-1, 1, 0), (-1, 0, 1), (1, 1, 1)$ è una base di $\mathbb{R}^3$, e si ha $T_{\mathcal{B}} = D$

Endomorfismi dipendenti da un parametro

Esercizio. Si T l'endomorfismo di $\mathbb{R}^2$ rappresentato rispetto alla base canonica dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \qquad (k \text{ parametro } \in \mathbb{R}).$$

Si determini per quali valori di k l'endomorfismo è diagonalizzabile e per tali valori si scrivano tutte le matrici diagonali che lo rappresentano.

Svolgimento. Il polinomio caratteristico di T è

$$\mathrm{p}_T(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & k \\ 2 & 4-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(4-\lambda) - 2k = \lambda^2 - 5\lambda + 4 - 2k.$$

Questo polinomio ha due radici reali distinte, coincidenti, o nessuna radice reale (due radici complesse coniugate distinte) secondo che il discriminate si apositivo, nullo o negativo

$$\Delta = 25 - 4(4-2k) = 9 + 8k \gtreqless 0, \quad \text{cioè} \quad k \gtreqless -\frac{9}{8}.$$

Caso $k > -\frac{9}{8}$. L'endomorfismo T di $\mathbb{R}^2$ ha due autovalori reali distinti, dunque è diagonalizzabile. Gli autovalori di T sono $\lambda_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{9+8k}}{2}$ Le matrici diagonali che rappresentano T sono

$$\begin{pmatrix} \frac{5+\sqrt{9+8k}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{5-\sqrt{9+8k}}{2} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac{5-\sqrt{9+8k}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{5+\sqrt{9+8k}}{2} \end{pmatrix}.$$

Caso $k < -\frac{9}{8}$. L'endomorfismo T non ha autovalori reali, dunque non è diagonalizzabile.

Caso $k = -\frac{9}{8}$. In questo caso

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{9}{8} \\ 2 & 4 \end{pmatrix},$$

e T ha due autovalori reali coincidenti $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{5}{2}$.

L'unico autospazio di T è $V_{5/2}$, l'insieme delle soluzioni del sistema $A\underline{x} = \frac{5}{2}\underline{x}$ cioè del sistema lineare omogeneo avente matrice dei coefficienti

$$A - \frac{5}{2}\mathrm{I} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & -\frac{9}{8} \\ 2 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

Questa matrice ha rango 1, dunque

$$\dim(V_{5/2}) = 2 - r(A - \frac{5}{2}\mathrm{I}) = 2 - 1 = 1.$$

In questo caso T non è diagonalizzabile.