Lezione del 23.05

Molteplicità algebrica e molteplicità geometrica di un autovalore

Consideriamo un polinomio di II grado a coefficienti reali

$$p(x) = ax^2 + bx + c, \qquad (a \neq 0).$$

Se il polinomio ha due radici reali r_1, r_2 distinte allora si fattorizza come

$$p(x) = a(x - r_1)(x - r_2);$$

se ha un'unica radice reale r, allora si fattorizza come

$$p(x) = a(x - r)^2,$$

e si preferisce dire che il polinomio ha due radici coincidenti in r, oppure che r è una radice doppia.

In generale, consideriamo un polinomio $p(x)$ a coefficienti reali di grado $n \geq 1$ ed una sua radice $r \in \mathbb{R}$. Per il teorema di Ruffini, $p(x)$ si può fattorizzare come

$$p(x) = (x - r)q_1(x),$$

con $q_1(x)$ polinomio a coefficienti reali di grado $n - 1$. Supponiamo che $q_1(x)$ abbia ancora radice r. Per il teorema di Ruffini, $q_1(x)$ si può fattorizzare come $q_1(x) = (x - r)q_2(x)$, con $q_2(x)$ polinomio a coefficienti reali di grado $n - 2$, e $p(x)$ si può fattorizzare come

$$p(x) = (x - r)^2 q_2(x).$$

Così proseguendo, si arriva a scrivere

$$p(x) = (x - r)^m q_m(x),$$

dove $q_m(x)$ è un polinomio a coefficienti reali di grado $n - m$ tale che $q_m(r) \neq 0$. Si dice allora che r è una radice di $p(x)$ con "molteplicità" m. In altri termini:

> si dice "molteplicità" di una radice r di un polinomio $p(x)$ di grado ≥ 1
> il massimo intero positivo m tale che $(x - r)^m$ divide $p(x)$.

Osservazione. Sia $p(x)$ un polinomio a coefficienti reali di grado $n \geq 1$ e siano $r_1, \ldots, r_p \in \mathbb{R}$ le sue radici reali, con molteplicità rispettive $m_1, \ldots, m_p$. Allora

$$p(x) = (x - r_1)^{m_1} \cdots (x - r_p)^{m_p} q(x)$$

con $q(x)$ polinomio a coefficienti reali che non ha alcuna radice in $\mathbb{R}$. In particolare, si ha $m_1 + \cdots + m_p \leq n$ e vale l'uguale se e solo se

$$p(x) = (x - r_1)^{m_1} \cdots (x - r_p)^{m_p} c, \qquad (c \neq 0 \text{ in } \mathbb{R})$$

cioè $p(x)$ "si fattorizza completamente" su $\mathbb{R}$.

Definizione. Sia T un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ e sia $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ un autovalore di T.

Si dice "molteplicità algebrica" di λ_0, e si indica con $\mathrm{m}_a(\lambda_0)$, la molteplicità di λ_0 come radice del polinomio caratteristico di T.

Si dice "molteplicità geometrica" di λ_0, e si indica con $\mathrm{m}_g(\lambda_0)$, la dimensione dell'autospazio V_{λ_0} associato a λ_0.

Osservazione. Per definizione, sia la molteplicità algebrica che la molteplicità geometrica di un autovalore sono interi > 0.

Teorema. Sia T un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$. Ciascun autovalore $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ di T ha molteplicità geometrica minore-uguale alla molteplicità geometrica:

$$\mathrm{m}_g(\lambda_0) \leq \mathrm{m}_a(\lambda_0).$$

Non diamo la dimostrazione di questo teorema.

Le relazioni fra la dimensione dello spazio su cui opera un endomorfismo e le molteplicità algebriche e geometriche degli autovalori dell'endomorfismo si possono riassumere come segue

$$\begin{aligned}
&\mathrm{m}_a(\lambda_1) + \cdots + \mathrm{m}_a(\lambda_p) \leq n \\
&\mathrm{m}_a(\lambda_i) \geq \mathrm{m}_g(\lambda_i), \quad \forall i = 1, \ldots, p \\
&\mathrm{m}_g(\lambda_1) + \cdots + \mathrm{m}_g(\lambda_p) \leq n
\end{aligned}$$

Osservazione. La disuguaglianza $1 \leq \mathrm{m}_g(\lambda_0) \leq \mathrm{m}_a(\lambda_0)$ nel caso in cui $\mathrm{m}_a(\lambda_0) = 1$ implica $\mathrm{m}_g(\lambda_0) = \mathrm{m}_g(\lambda_0) = 1$.

Teorema di caratterizzazione degli endomorfismi diagonalizzabili

Teorema. Sia T un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ e siano $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{R}$ gli autovalori di T. Sono equivalenti le seguenti affermazioni:

(1) $\mathrm{m}_a(\lambda_1) + \cdots + \mathrm{m}_a(\lambda_p) = n$ e $\mathrm{m}_g(\lambda_i) = \mathrm{m}_a(\lambda_i)$ per ogni $i = 1, \ldots, n$;

(2) $\mathrm{m}_g(\lambda_1) + \cdots + \mathrm{m}_g(\lambda_p) = n$;

(3) T è diagonalizzabile.

In tal caso, le matrici diagonali che rappresentano T sono tutte e sole quelle che hanno elementi diagonali gli autovalori di T, tali che ciascun autovalore ha un numero di occorrenze uguale alla sua molteplicità algebrica/geometrica.

Non diamo la dimostrazione. Osserviamo solo che l'implicazione da (1) a (2) è ovvia e l'implicazione da (2) a (3) è il contenuto dal teorema della lezione precedente.

Esercizio. Sia T l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ dato da $T(\underline{x}) = A\underline{x}$ ($\underline{x} \in \mathbb{R}^3$) dove

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}, \qquad (k \text{ parametro } \in \mathbb{R}).$$

Si determinino i valori di k per i quali T è diagonalizzabile e per tali valori si scrivano tutte le matrici diagonali che rappresentano T.

Svolgimento. Il polinomio caratteristico di T è

$$\begin{aligned}
\mathrm{p}_T(\lambda) &= \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & k-\lambda \end{pmatrix} \\
&= \lambda^2(k-\lambda) + 0 + 0 - (0 + 0 + (k-\lambda)) \\
&= (\lambda^2 - 1)(k-\lambda) \\
&= -(\lambda+1)(\lambda-1)(\lambda-k).
\end{aligned}$$

Le radici di $\mathrm{p}_T(\lambda)$ sono:

$$-1,\ 1,\ k.$$

Osserviamo che la somma delle molteplicità algebriche degli autovalori di T è in ogni caso $= 3$.

Distinguiamo tre casi: $k \neq -1, 1$; $k = -1$; $k = 1$.

Caso $k \neq -1, 1$. L'endomorfismo T di $\mathbb{R}^3$ ha i tre autovalori distinti $-1, 1, k$ dunque è diagonalizzabile, ed è rappresentato dalla matrice diagonale

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}$$

e da quelle che si ottengono da questa permutando gli elementi diagonali (sono $3! = 6$).

Caso $k = -1$. La matrice A diviene

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

e gli autovalori di T sono

$$-1,\ 1, \qquad \text{con} \qquad \mathrm{m}_a(-1) = 2,\ \mathrm{m}_a(1) = 1.$$

Per ragioni generali si ha $\mathrm{m}_g(1) = \mathrm{m}_a(1) = 1$.

L'autospazio V_{-1} è l'insieme delle soluzioni di $A\underline{x} = -\underline{x}$ cioè l'insieme delle soluzioni del sistema lineare omogeneo $(A + \mathrm{I})\underline{x} = 0$, dove

$$A + \mathrm{I} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La sua dimensione è

$$\dim(V_{-1}) = 3 - r(A + \mathrm{I}) = 3 - 1 = 2,$$

dunque

$$\mathrm{m}_g(-1) = \mathrm{m}_a(-1) = 2.$$

Ciascuno degli autovalori di T ha molteplicità algebrica uguale alla molteplicità geometrica, dunque T è diagonalizzabile, ed è rappresentato dalla matrice diagonale

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e da quelle che si ottengono da questa permutando gli elementi diagonali (sono 3).

Caso $k = 1$. La matrice A diviene

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

e gli autovalori di T sono

$$-1,\ 1, \qquad \text{con} \qquad \mathrm{m}_a(-1) = 1,\ \mathrm{m}_a(1) = 2.$$

Per ragioni generali si ha $\mathrm{m}_g(-1) = \mathrm{m}_a(-1) = 1$. L'autospazio V_1 è l'insieme delle soluzioni di $A\underline{x} = \underline{x}$ cioè l'insieme delle soluzioni del sistema lineare omogeneo $(A-\mathrm{I})\underline{x} = 0$, dove

$$A - \mathrm{I} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La sua dimensione è

$$\dim(V_1) = 3 - r(A - \mathrm{I}) = 3 - 2 = 1.$$

Dunque

$$\mathrm{m}_g(1) = 1 < 2 = \mathrm{m}_a(1)$$

e T non è diagonalizzabile.

Invarianti di un endomorfismo

Determinante della matrice inversa. Sia A una matrice quadrata che possiede inversa A^{-1}. Allora dall'uguaglianza $AA^{-1} = \mathrm{I}$, dal teorema di Binet, e dalla definizione di determinante, segue $\det(A)\det(A^{-1}) = \det(AA^{-1}) = \det(I) = 1$, che significa

$$\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}.$$

Sia $T : V \to V$ un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato V. Se $\mathcal{B}$ ed $\mathcal{A}$ sono due basi ordinate di V, allora la matrice di T rispetto a $\mathcal{B}$ si ottiene dalla matrice di T rispetto ad $\mathcal{A}$ come

$$T_{\mathcal{B}} = \mathrm{id}_{\mathcal{B}\mathcal{A}}\ T_{\mathcal{A}}\ \mathrm{id}_{\mathcal{A}\mathcal{B}} = (\mathrm{id}_{\mathcal{A}\mathcal{B}})^{-1} T_{\mathcal{A}}\ \mathrm{id}_{\mathcal{A}\mathcal{B}}.$$

Posto per brevità $P = \mathrm{id}_{\mathcal{A}\mathcal{B}}$, si ha

$$T_{\mathcal{B}} = P^{-1} T_{\mathcal{A}} P.$$

Proposizione. $T_{\mathcal{B}}$ e $T_{\mathcal{A}}$ hanno lo stesso determinante. Infatti

$$\begin{aligned} \det(T_{\mathcal{B}}) &= \det(P^{-1} T_{\mathcal{A}} P) \\ &= \det(P^{-1})\det(T_{\mathcal{A}})\det(P) \\ &= (\det(P))^{-1}\det(T_{\mathcal{A}})\det(P) \\ &= \det(T_{\mathcal{A}}). \end{aligned}$$

Osservazione. La matrice caratteristica di $T_{\mathcal{B}}$ si ottiene dalla matrice caratteristica di $T_{\mathcal{A}}$ come

$$T_{\mathcal{B}} - \lambda\mathrm{I} = P^{-1}(T_{\mathcal{A}} - \lambda\mathrm{I})P.$$

Infatti

$$\begin{aligned} P^{-1}(T_{\mathcal{A}} - \lambda\mathrm{I})P &= P^{-1}T_{\mathcal{A}}P - P^{-1}\lambda\mathrm{I}P \\ &= P^{-1}T_{\mathcal{A}}P - \lambda P^{-1}\mathrm{I}P \\ &= P^{-1}T_{\mathcal{A}}P - \lambda\mathrm{I}. \end{aligned}$$

Da ciò segue la

Proposizione. $T_{\mathcal{B}}$ e $T_{\mathcal{A}}$ hanno lo stesso polinomio caratteristico:

$$\det(T_{\mathcal{B}} - \lambda\mathrm{I}) = \det(T_{\mathcal{A}} - \lambda\mathrm{I}).$$

Ciò permette di definire “polinomio caratteristico” di T il polinomio caratteristico di una qualsiasi matrice che rappresenti T, e di scrivere semplicemente p_T senza dover specificare alcuna base.