Esercizi XII (Qui per "base" si intende sempre "base ordinata")

1. Sia T l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ rappresentato rispetto alla base canonica dalla matrice
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$
(1) Si stabilisca se T è diagonalizzabile. In caso affermativo: (2) Si descrivano tutte le matrici diagonali che rappresentano T. (3) Scelta una matrice diagonale D, si determini una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$ tale che $T_{\mathcal{B}} = D$.

2. Sia F l'endomorfismo di $\mathbb{R}^4$ rappresentato rispetto alla base canonica dalla matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$
Si determini se possibile una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^4$ di autovettori di F, si effettui una verifica, e si scriva la matrice $F_{\mathcal{B}}$.

3. Sia T l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ rappresentato rispetto alla base canonica dalla matrice
$$\begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad k \text{ parametro } \in \mathbb{R}.$$
(1) Si determinino i valori di k tali che T sia diagonalizzabile. (2) Per tali valori di descrivano tutte le matrici diagonali che rappresentano T.

4. Sia F l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ rappresentato rispetto alla base canonica dalla matrice
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$
Per ciascuno dei seguenti vettori si dica se è un autovettore di F
$$(1,-1,1),\ (1,1,1),\ (1,2,1),\ (1,3,2).$$
Si determini se possibile una base $\mathcal{A}$ di $\mathbb{R}^3$ di autovettori di F e si scriva la matrice $F_{\mathcal{A}}$.