Esercitazione pre-scritto

(1) In $\mathbb{R}^4$ sono dati i vettori $(1,-1,1,0),(0,1,-1,0),(0,-1,1,1)$. (1) Si stabilisca se i vettori sono linearmente indipendenti, se sono una base di $\mathbb{R}^4$, se generano $\mathbb{R}^4$; si svolga l'ultimo punto in due modi, uno usando solo la definizione.

(2) Sia $L:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare tale che

$$\begin{aligned} L(\underline{e}_1) &= \underline{e}_1-\underline{e}_2\\ L(\underline{e}_2) &= \underline{e}_1-k\underline{e}_3\\ L(\underline{e}_3) &= \underline{e}_2-k\underline{e}_3\\ L(\underline{e}_4) &= -\underline{e}_1-\underline{e}_2+2\underline{e}_3, \end{aligned}$$

dove k è un parametro in $\mathbb{R}$. Si determini al variare di k la dimensione e una base di $\mathrm{Ker}(L)$ e di $\mathrm{Im}(L)$. Si dica per quali valori di k l'applicazione L è iniettiva e per quali è suriettiva.

(3) Sono date le applicazioni

$$\begin{aligned} &F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3, \quad F(x,y)=(x,2x+2y,y),\\ &G:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3, \quad G(x,y,z)=(x+y,-x+y-z,y+z). \end{aligned}$$

Si determini l'applicazione composta $G\circ F$ in due modi, usando in uno solo la definzione di applicazione composta e nell'altro la rappresentazione delle applicazioni con matrici. Analogamente, se possibile, per l'applicazione composta $F\circ G$.

(4) Sia $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare rappresentata dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 1 & 2\\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

rispetto alle basi $\mathcal{B}':(1,1,0),(1,-1,0),(1,1,1)$ di $\mathbb{R}^3$ e $\mathcal{B}:(1,1),(2,1)$ di $\mathbb{R}^2$. Si determini la matrice che rappresenta F rispetto alle basi canoniche. Si effettui una verifica.

(5) Sia T l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ dato da

$$T(\underline{x})=\begin{pmatrix} k & 1 & 1\\ 0 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}\underline{x}, \qquad \underline{x}\in\mathbb{R}^3,$$

dove k è un parametro in $\mathbb{R}$. Si determini per quali k l'endomorfismo T è diagonalizzabile e per tali k si scriva una matrice diagonale che rappresenta T.