Esercizio. Verificare che per le forme quadratiche binarie $f(x,y) = a_2x^2 + 2a_1xy + a_0y^2$ il discriminante $\Delta = A_1^2 - A_2A_0$ e' un invariante, e determinarne il peso. Si chiede di dare almeno due dimostrazioni, delle quali una diretta (senza uso di alcuna teoria).

Ciascuna quadratica binaria

$$f(x,y) = a_2x^2 + 2a_1xy + a_0y^2$$

mediante una trasformazione non singolare delle variabili

$$\begin{cases} x = c_{11}\overline{x} + c_{12}\overline{y} \\ y = c_{21}\overline{x} + c_{22}\overline{y} \end{cases}, \qquad \det(c_{ij}) \neq 0$$

da' origine ad una nuova quadratica binaria

$$\overline{f}(\overline{x},\overline{y}) = \overline{a}_2\overline{x}^2 + 2\overline{a}_1\overline{xy} + \overline{a}_0\overline{y}^2$$

definita dalla condizione

$$\overline{f}(\overline{x},\overline{y}) = f(x,y)$$

per ogni (x,y) ed ogni $(\overline{x},\overline{y})$ legati dalla relazione di sopra; esplicitamente si ha

$$\begin{aligned}
\overline{a}_2 &= a_2c_{11}^2 + 2a_1c_{11}c_{21} + a_0c_{21}^2 \\
\overline{a}_1 &= a_2c_{11}c_{12} + a_1\left(c_{11}c_{22} + c_{21}c_{12}\right) + a_0c_{21}c_{22} \\
\overline{a}_0 &= a_2c_{12}^2 + 2a_1c_{12}c_{22} + a_0c_{22}^2
\end{aligned}$$

discriminante delle forme quadratiche binarie:

$$\Delta(A_0, A_1, A_2) = A_1^2 - A_2A_0$$

verifico che Δ e' un invariante, e determino il suo indice.

I modo: si ha

$$\Delta(\overline{a}_0, \overline{a}_1, \overline{a}_2) = \overline{a}_1^2 - \overline{a}_2\overline{a}_0$$

sostituisco ed ottengo

$$\begin{aligned}
&\left(a_2c_{11}c_{12} + a_1\left(c_{11}c_{22} + c_{21}c_{12}\right) + a_0c_{21}c_{22}\right)^2 - \\
&\qquad - \left(a_2c_{11}^2 + 2a_1c_{11}c_{21} + a_0c_{21}^2\right)\left(a_2c_{12}^2 + 2a_1c_{12}c_{22} + a_0c_{22}^2\right)
\end{aligned}$$

e' un polinomio omogeneo di secondo grado nelle variabili a_2, a_1, a_0; i coefficienti sono dati da

$$\begin{aligned}
cf(a_2^2) &= (c_{11}c_{12})^2 - c_{11}^2 c_{12}^2 = 0\\
cf(a_2 a_1) &= 2c_{11}c_{12}\left(c_{11}c_{22} + c_{21}c_{12}\right) - c_{11}^2 2c_{12}c_{22} - 2c_{11}c_{21}c_{12}^2 = 0\\
cf(a_2 a_0) &= 2c_{11}c_{12}c_{21}c_{22} - c_{11}^2 c_{22}^2 - c_{21}^2 c_{12}^2\\
cf(a_1^2) &= \left(c_{11}c_{22} + c_{21}c_{12}\right)^2 - 2c_{11}c_{21}2c_{12}c_{22}\\
cf(a_1 a_0) &= 2\left(c_{11}c_{22} + c_{21}c_{12}\right)c_{21}c_{22} - 2c_{11}c_{21}c_{22}^2 - c_{21}^2 2c_{12}c_{22} = 0\\
cf(a_0^2) &= (c_{21}c_{22})^2 - c_{21}^2 c_{22}^2 = 0
\end{aligned}$$

dunque si ottiene

$$(c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21})^2(a_1^2 - a_2 a_0).$$

riassumendo:

$$\Delta(\overline{a}_0, \overline{a}_1, \overline{a}_2) = \det(c_{ij})^2 \Delta(a_0, a_1, a_2)$$

cioe' il discriminante e' un invariante di indice 2 delle forme quadratiche binarie.

II modo. Considero una sostituzione lineare diagonale, cioe' del tipo $\begin{cases} x = c_{11}\overline{x} \\ y = c_{22}\overline{y} \end{cases}$; a una tale sostituzione corrisponde la trasformazione

$$\begin{aligned}
\overline{a}_2 &= a_2 c_{11}^2\\
\overline{a}_1 &= a_1 c_{11} c_{22}\\
\overline{a}_0 &= a_0 c_{22}^2
\end{aligned}$$

si ha

$$\overline{a}_1^2 - \overline{a}_2\overline{a}_0 = (a_1 c_{11} c_{22})^2 - a_2 c_{11}^2 a_0 c_{22}^2 = (c_{11}c_{22})^2(a_1^2 - a_2 a_0)$$

dunque $\Delta(\overline{a}_0, \overline{a}_1, \overline{a}_2) = (c_{11}c_{22})^2 \Delta(a_0, a_1, a_2)$;

Considero una sostituzione lineare suptriangolare, cioe' del tipo $\begin{cases} x = \overline{x} + c_{12}\overline{y} \\ y = \overline{y} \end{cases}$; a una tale sostituzione corrisponde la trasformazione

$$\begin{aligned}
\overline{a}_2 &= a_2\\
\overline{a}_1 &= a_2 c_{12} + a_1\\
\overline{a}_0 &= a_2 c_{12}^2 + 2a_1 c_{12} + a_0
\end{aligned}$$

si ha

$$\overline{a}_1^2 - \overline{a}_2\overline{a}_0 = (a_2c_{12} + a_1)^2 - a_2(a_2c_{12}^2 + 2a_1c_{12} + a_0) = a_1^2 - a_2a_0$$

dunque $\Delta(\overline{a}_0, \overline{a}_1, \overline{a}_2) = \Delta(a_0, a_1, a_2)$;

Considero una sostituzione lineare subtriangolare, cioe' del tipo $\begin{cases} x = \overline{x} \\ y = c_{21}\overline{x} + \overline{y} \end{cases}$; a una tale sostituzione corrisponde la trasformazione

$$\begin{aligned} \overline{a}_2 &= a_2 + 2a_1c_{21} + a_0c_{21}^2 \\ \overline{a}_1 &= a_1 + a_0c_{21} \\ \overline{a}_0 &= a_0 \end{aligned}$$

si ha

$$\overline{a}_1^2 - \overline{a}_2\overline{a}_0 = (a_1 + a_0c_{21})^2 - (a_2 + 2a_1c_{21} + a_0c_{21}^2)a_0 = a_1^2 - a_2a_0$$

dunque $\Delta(\overline{a}_0, \overline{a}_1, \overline{a}_2) = \Delta(a_0, a_1, a_2)$.

Dunque in ciascuno dei tre casi si ha:

$$\Delta(\overline{a}_0, \overline{a}_1, \overline{a}_2) = \det(c_{ij})^2\Delta(a_0, a_1, a_2);$$

inoltre, le sostituzioni dei tre tipi sopra considerate generano tutte le possibili sostituzioni nonsingolari; infine questa uguaglianza si mantiene per composizione di sostituzioni. In definitiva, l'uguaglianza di sopra vale per ogni sostituzione.

III modo. Ciascuna quadratica $n-$aria

$$f(x) = x^t a x, \qquad a = (a_{ij})_{1,1}^{n,n} \ simmetrica, \ x = (x_i)_1^n,$$

mediante una trasformazione nonsingolare delle variabili

$$x = c\overline{x}, \qquad c = (c_{ij})_{1,1}^{n,n} \ nonsingolare,$$

da' origine ad una nuova forma quadratica $n-$aria

$$\overline{f}(\overline{x}) = \overline{x}^t \overline{a}\overline{x}$$

definita dalla condizione

$$\overline{f}(\overline{x}) = f(x),$$

per ogni x ed $\overline{x}$ legati dalla condizione di sopra; esplicitamente si ha

$$\overline{a} = c^t ac.$$

Il discriminante delle forme quadratiche $n-$arie e' definito da

$$\Delta(A) = \det(A),$$

per ogni matrice di indeterminate $A = (A_{ij})$ simmetrica $n \times n$. Si ha

$$\Delta(\overline{a}) = \det(\overline{a}) = \det(c^t ac) = \det(c)^2 \det(a) = \det(c)^2 \Delta(a).$$

Dunque il discriminante delle forme quadratiche $n-$arie e' un invariante di indice 2.

Esercizio. Utilizzando il fatto che ogni quantica e' covariante di se' stessa, cioe' $\overline{f}(\overline{x}) = f(x)$ per ogni ..., ed utilizzando l'espansione di Taylor

$$f(x + y) = f(x) + grad(f, x) \cdot y + \frac{1}{2} y^T H(f, x) y + \dots,$$

si mostri che l'Hessiano $\mathcal{H}(f, x) = \det H(f, x)$ e' un covariante di indice 2.

Consideriamo gli sviluppi di Taylor

$$f(x + y) = f(x) + grad(f, x) \cdot y + \frac{1}{2} y^T H(f, x) y + \dots;$$
$$f(\overline{x} + \overline{y}) = \overline{f}(\overline{x}) + grad(\overline{f}, \overline{x}) \cdot \overline{y} + \frac{1}{2} \overline{y}^T H(\overline{f}, \overline{x}) \overline{y} + \dots;$$

ed osserviamo che per definizione e per linearita' si ha

$$f(x + y) = \overline{f}(\overline{x + y}) = \overline{f}(\overline{x} + \overline{y});$$

dunque le componenti omogenee nei due sviluppi devono essere uguali, in particolare si ha

$$y^T H(f, x) y = \overline{y}^T H(\overline{f}, \overline{x}) \overline{y}$$

per ogni $y, \overline{y}$ legati dalla relazione $y = c\overline{y}$; da cio' segue

$$C^T H(f, x) C = H(\overline{f}, \overline{x});$$

passando ai determinanti infine si ottiene

$$\mathcal{H}(\overline{f}, \overline{x}) = \det(c)^2 \mathcal{H}(f, x).$$

Problema. Sia $\mathbb{K}$ un campo infinito. Consideriamo il gruppo $\mathrm{G} = \mathrm{SL}_m(\mathbb{K})$, con la sua solita azione sullo spazio vettoriale $V = \mathbb{K}^m$, e quella naturale sullo spazio vettoriale delle sequenze di p vettori in V, cioe' quella per moltiplicazione sullo spazio vettoriale $\mathrm{M}_{m\times p}(\mathbb{K})$ delle matrici $m \times p$. Nel caso $p > m$, cosa si puo' arrivare a dire sugli invarianti, usando solo le forme canoniche delle matrici date dall'algoritmo di Gauss-Jordan e il principio di irrilevanza delle disuguaglianze algebriche?

Sia $v = (v_1, \dots, v_p)$ una matrice $m \times p$ nella quale le prime m colonne sono linearmente indipendenti, cioe' $[v_1, \dots, v_m] \neq 0$, e sia $w = (w_1, \dots, w_p)$ la sua forma canonica sotto l'azione di G. Si ha

$$w = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 & w_{1,m+1} & \dots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & \dots & 1 & 0 & w_{m-1,m+1} & \dots \\ 0 & \dots & 0 & w_{mm} & w_{m,m+1} & \dots \end{pmatrix}.$$

Per gli sviluppi di Laplace, o equivalentemente per la regola di Cramer, si ha

$$\begin{aligned} w_{mm} &= [w_1, \dots, w_m] \\ w_{1,m+1} &= \frac{[w_{m+1}, w_2, \dots, w_m]}{[w_1, w_2, \dots, w_m]} \qquad \dots \qquad w_{m-1,m+1} = \frac{[w_1, \dots, w_{m+1}, w_m]}{[w_1, \dots, w_{m-1}, w_m]} \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad w_{m,m+1} = [w_1, \dots, w_{m-1}, w_{m+1}] \end{aligned}$$

e analogamente per gli elementi delle colonne successive.

Consideriamo ora un G$-$invariante $F \in K[\mathrm{M}_{m\times p}(\mathbb{K})]^{\mathrm{G}}$. Per ogni matrice $v = (v_1, \dots, v_p)$ con $[v_1, \dots, v_m] \neq 0$ si ha

$$\begin{aligned} F(v) = F(w) &= (\textit{polinomio nelle } [j_1, \dots, j_m] \textit{ e } [1, \dots, m]^{-1})(w) \\ &= (\textit{polinomio nelle } [j_1, \dots, j_m] \textit{ e } [1, \dots, m]^{-1})(v) \\ &= \left(\frac{\textit{polinomio nelle } [j_1, \dots, j_m]}{\textit{potenza di } [1, \dots, m]} \right)(v). \end{aligned}$$

Dunque per il principio di irrilevanza delle disuguaglianze algebriche si ha

$$F = \frac{\textit{polinomio nelle } [j_1, \dots, j_m]}{\textit{potenza di } [1, \dots, m]},$$

in altri termini, esiste un intero naturale t tale che

$$[1, \dots, m]^t F = \textit{polinomio nelle } [j_1, \dots, j_m].$$

Esercizi. Siano: $\mathbb{K}$ un campo di caratteristica zero, V_m uno spazio vettoriale di dimensione m con una base fissata $e_1, \ldots, e_m$, $\mathrm{Sym}_n[V_m]$ la potenza simmetrica $n-$ma di V_m, e sia $U_{n,m} : \mathbb{K}[L|P_m] \to \mathbb{K}[\mathrm{Sym}_n[V_m]]$ il relativo operatore umbrale.

1. Si provi che ciacun operatore $U_{n,m}$ e' un morfismo di $\mathfrak{sl}_m-$moduli destri.

2. Si dia una descrizione di $U_{n,m}$ adattata alla rappresentazione degli elementi di $\mathrm{Sym}_n[V_m]$ nella forma

$$t = \sum \varphi_{i_1,i_2,\ldots,i_n} e_{i_1} e_{i_2} \cdots e_{i_n},$$

   dove la sommatoria e' estesa a tutte le sequenze $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ di n interi compresi fra 1 ed m, e si intende che $\varphi_{i_1,i_2,\ldots,i_n} = \varphi_{j_1,j_2,\ldots,j_n}$ se le due sequenze $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ e $(j_1, j_2, \ldots, j_n)$ possono essere trasformate l'una nell'altra mediante una permutazione dei posti.

3. Si dia una rappresentazione del discriminante di un tensore simmetrico quadratico su V_m come immagine tramite $U_{2,m}$ di un un elemento di $\mathbb{K}[L|P_m]$.

4. Si dia una descrizione di $U_{n,2}$ adattata alla rappresentazione degli elementi di $\mathrm{Sym}_n[V_2]$ nella forma

$$t = \sum \binom{n}{i} a_i e_1^i e_2^{n-i},$$

   dove l'indice i della sommatoria varia fra gli interi compresi fra 0 ed n.

5. Si determini l'invariante di un tensore binario di grado n dato dall'immagine tramite $U_{n,2}$ della potenza $[a, b]^n$ di una bracket $[a, b]$ (a, b elementi distinti in L).