Algebra superiore 2, II modulo: Teoria classica degli invarianti

Francesco Regonati

2015

Abstract

Brevi note introduttive.

La teoria classica degli invarianti ha come suo principale oggetto di interesse gli invarianti e piu' in generale i covarianti delle forme algebriche, ed ha origine nella prima meta' del IXX secolo ad opera di vari autori, fra i quali Cayley e Sylvester. Per ciascuna algebra dei covarianti delle forme algebriche di un dato grado e numero di variabili, si diede mediante il metodo simbolico di Aronhold una suggestiva costruzione di un sistema di generatori lineare, ci si pose il problema dell'esistenza di un sistema finito di generatori d'algebra, e Gordan nel 1868 diede una costruzione di un tale sistema nel caso delle forme binarie.

Il passaggio al caso di forme ternarie si rivelo' impossibile da gestire, fino a che nel 1890 Hilbert provo' l'esistenza di un sistema finito di generatori d'algebra per i covarianti delle forme $n-$arie per n qualsiasi. La dimostrazione di Hilbert non fu considerata come dimostrazione e fu criticata aspramente da molti (specialmente da Gordan) per non essere costruttiva. Si puo' dire che i primi brani dell'algebra e della geometria moderna siano emersi in questo lavoro di Hilbert (con il teorema della base, il teorema delle sizigie e il nullstellensatz). Hilbert nel 1893 diede anche una dimostrazione costruttiva del suo teorema.

Negli anni 20 del XX secolo Weitzenboeck tento' di dare un metodo simbolico per i covarianti dei tensori antisimmetrici. Negli anni 20 e 30 H. Weyl riformulo' ed amplio' dal profondo la teoria degli invarianti inserendola nel quadro della teoria delle rappresentazioni. Il lavoro di Hilbert del 1893 rimase nell'ombra fino a quando negli anni 60 fu ripreso e sviluppato da Mumford nella teoria geometrica degli invarianti, e negli anni 90 da Sturmfels, Derksen e altri nella teoria degli invarianti computazionale. Il metodo simbolico, per quanto si rivelasse suggestivo e solido nelle sue applicazioni, mancava di giustificazione; una limpida giustificazione fu data negli anni 80 da Rota e collaboratori, che giunsero fino a dare un metodo simbolico superalgebrico per lo studio unificato di invarianti di tensori simmetrici ed antisimmetrici.

In senso stretto, il termine "teoria classica degli invarianti" si riferisce alla teoria per le forme binarie.

Breve descrizione del programma del modulo.

-Invarianti e covarianti delle forme binarie; rappresentazione simbolica dei covarianti; teorema di Gordan. Invarianti vettoriali; I e II teorema fondamentale. Invarianti e covarianti di tensori simmetrici; rappresntazione simbolica dei covarianti.
-Superalgebre letterplace; bitableaux, straightening. Invarianti e covarianti congiunti di tensori simmetrici e antisimmetrici; rappresentazione simbolica dei covarianti.

Alcuni primi riferimenti

[L] D.E. Littlewood, The Skeleton Key of Mathematics: A Simple Account of Complex Algebraic Theories, London: Hutchinson and Co., 1949; reprint by Dover, 2002
[KR] J.P.S. Kung, G.-C. Rota, The invariant theory of binary forms, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) 10, n.1 (1984), 27-85
[GRS] F.D. Grosshans, G.-C. Rota, J. Stein, Invariant Theory and Superalgebras, CBMS Conference Series in Mathematics 69. ... Providence, R.I., 1987
[O] P.J. Olver, Classical invariant theory, London Mathematical Society Student Texts 44, Cambridge: Cambridge University Press, 1999
[G] F.D. Grosshans, The work of Gian-Carlo Rota on invariant theory, Algebra univers. 49 (2003) 213-258

Chapter 1

Covarianti delle forme binarie

1.1 I lezione

Fino a nuovo avviso contrario, il riferimento principale del discorso sara' l'articolo [KR].

1.1.1 Discriminante.

Sia $\mathbb{K}$ un campo di caratteristica zero; in particolare, $\mathbb{K}$ e' infinito, e dunque quando cio' non generi confusione possiamo identificare i polinomi in un dato insieme di indeterminate con le funzioni poliniomiali nel corrispondente insieme di variabili.
Consideriamo un polinomio di secondo grado

$$f(x) = a_2x^2 + 2a_1x + a_0,$$

in una incognita x, dove i coefficienti a_i sono in $\mathbb{K}$ e $a_2 \neq 0$. Completando il quadrato si ha

$$\begin{aligned} f(x) &= a_2x^2 + 2a_1x + a_0 \\ &= a_2\left(x^2 + 2\frac{a_1}{a_2}x + \frac{a_1^2}{a_2^2}\right) - \frac{a_1^2}{a_2} + a_0 = a_2\left(\overline{x}^2 - \frac{\Delta}{a_2^2}\right) \end{aligned}$$

dove $\overline{x} = x + \frac{a_1}{a_2}$, e

$$\Delta = a_1^2 - a_2a_0$$

e' il discriminante del polinomio $f(x)$. Da cio' segue che

1- $f(x)$ ha radici in $\mathbb{K}$ se e solo se Δ e' un quadrato in $\mathbb{K}$;
2- in tal caso, $f(x)$ ha due radici distinte o coincienti se e solo se Δ e' diverso o uguale a 0.

Questo fatto si puo' riformulare in termini di una forma quadratica in due variabili, dove le sue radici vengono considerate sulla retta proiettiva, e in prima battuta si puo' generalizzare in due direzioni.
1- Considerando una forma quadratica in un numero qualsiasi di variabili. In questo caso il discriminante della forma viene definito come il determinante della matrice simmetrica associata alla forma; il discriminante si annulla se e solo se la iperquadrica associata alla forma possiede almeno un punto singolare.
2- Considerando forme omogenee di grado qualsiasi in due variabili. In questo caso il discriminante della forma viene definito come il risultante della forma e di una delle sue due derivate parziali; il discriminante si annulla se e solo se la forma possiede almeno una radice multipla.

1.1.2 Forme binarie.

Consideriamo una forma binaria

$$f(x,y) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a_i x^i y^{n-i}$$

di grado n nelle variabili x, y, dove i coefficienti a_i sono elementi di $\mathbb{K}$. Ogni sostituzione lineare nonsingolare di variabili

$$\begin{cases} x = c_{11}\overline{x} + c_{12}\overline{y} \\ y = c_{21}\overline{x} + c_{22}\overline{y} \end{cases},$$

dove i coefficeinti c_{ij} sono elementi di $\mathbb{K}$ tali che

$$\det(c_{ij}) = c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21} \neq 0,$$

da' origine a una nuova forma binaria

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \overline{a}_i \overline{x}^i \overline{y}^{n-i} = \overline{f}(\overline{x}, \overline{y}).$$

di grado n nelle variabili $\overline{x}, \overline{y}$ i cui coefficenti $\overline{a}_i$ sono polinomi nei coefficienti a_i di f e nei coefficienti c_{ij} della sostituzione lineare.

Un polinomio $I(A_0, A_1, \ldots, A_n)$ in variabili $A_0, A_1, \ldots, A_n$ si dice *invariante di peso g delle forme binarie di grado n* (g intero non negativo) se e solo se

$$I(\overline{a}_0, \overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_n) = \det(c_{ij})^g I(a_0, a_1, \ldots, a_n)$$

per ogni forma binaria di grado n ed ogni trasformazione nonsingolare delle due variabili. La parte sostanziale della condizione e' che $I(\overline{a}_0, \overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_n)$ sia uguale a $I(a_0, a_1, \ldots, a_n)$, a meno di una funzione dei coefficienti c_{ij}; il fatto che questa funzione sia un polinomio potenza del determinate $\det(c_{ij})$ viene da se'.

Esercizio. Verificare che per le forme quadratiche binarie $f(x, y) = a_2x^2 + 2a_1xy + a_0y^2$ il discriminante $\Delta = A_1^2 - A_2A_0$ e' un invariante, e determinarne il peso. Si chiede di dare almeno due dimostrazioni, delle quali una diretta (senza uso di alcuna teoria).

Scopo della teoria degli invarianti delle forme binarie e' descrivere nel modo piu' esplicito possibile tutti gli invarianti delle forme binarie di un qualsiasi grado.

1.2 II lezione

1.2.1 Notazione.

In breve, possiamo esprimere le definizioni e le notazioni date come segue: il nostro discorso riguarda le forme di un dato grado n in un dato numero m di variabili, dette $n-$iche $m-$arie nel linguaggio classico, e le sostituzioni lineari nonsingolari delle m variabili; per ogni $n-$ica $m-$aria f ed ogni sostituzione lineare c delle m variabili si ha una nuova $n-$ica $m-$aria $\overline{f}$; una funzione polinomiale I delle $n-$iche $m-$arie si dice invariante di indice g (intero non negativo) se e solo se

$$I(\overline{f}) = \det(c)^g I(f),$$

per ogni f ed ogni c. Per ora siamo principalmente interessati al caso $n = 2$.

1.2.2 Hessiano.

Per ogni $n-$ica $m-$aria f ed ogni $m-$pla di scalari x, consideriamo le derivate miste del secondo ordine $f_{x_i x_j}(x)$ di f in x, la matrice Hessiana di f in x $H(f,x) = \big(f_{x_i x_j}(x)\big)$ e lo scalare Hessiano di f in x dato da

$$\mathcal{H}(f,x) = \det H(f,x).$$

Si prova che per ciascuna sostituzione lineare nonsingolare $x = c\overline{x}$ si ha

$$\mathcal{H}(\overline{f},\overline{x}) = \det(c)^2 \mathcal{H}(f,x)$$

per ogni f ed ogni x (cfr. Esercizio piu' avanti).

Nel caso delle $n-$iche binarie in variabili $x = (x_1, x_2)$ si ha

$$\mathcal{H}(f,x) = \det \begin{pmatrix} f_{x_1x_1}(x) & f_{x_1x_2}(x) \\ f_{x_2x_1}(x) & f_{x_2x_2}(x) \end{pmatrix} = f_{x_1x_1}(x) f_{x_2x_2}(x) - f_{x_1x_2}(x)^2.$$

Osserviamo che, se f e' a meno di uno scalare una potenza $n-$ma di una forma lineare, allora con una opportuna sostituzione lineare nonsingolare di variabili possiamo trasformarla in

$$\overline{f}(\overline{x}_1, \overline{x}_2) = a\overline{x}_1^n,$$

e si ha che

$$\mathcal{H}(f,x) = \det(c)^{-2}\mathcal{H}(\overline{f},\overline{x}) = \det(c)^{-2} \det \begin{pmatrix} an(n-1)\overline{x}_1^{n-2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0;$$

si prova che vale anche il viceversa. Dunque

L'Hessiano di una forma binaria e' identicamente nullo se e solo se la forma e' una potenza di una forma lineare:

$$\mathcal{H}(f,x) = 0 \,\forall x \quad sse \quad f(x) = a(b_1x_1{+}b_2x_2)^n \quad (a, b_i \in \mathbb{K}\, opportuni).$$

Nel IXX secolo fu pubblicato un teorema secondo il quale l'Hessiano di una forma $m-$aria e' identicamente nullo se e solo se la forma si puo' esprimere in funzione di $m-1$ variabili; significato molto bello ... ma falso: dopo una ventina d'anni si trovo' un controesempio (cfr [O] e riferimenti in esso).

Nel caso delle quadratiche binarie

$$f(x,y) = a_2x^2 + 2a_1xy + a_0y^2$$

si ha

$$\mathcal{H}(f;x,y) = \det\begin{pmatrix} 2a_2 & 2a_1 \\ 2a_1 & 2a_0 \end{pmatrix} = 4(a_2a_0 - a_1^2) = -4\Delta(f).$$

Nel caso delle cubiche binarie

$$f(x,y) = a_3x^3 + 3a_2x^2y + 3a_1xy^2 + a_0y^3$$

si ha

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(f;x,y) &= \det\begin{pmatrix} 6a_3x + 6a_2y & 6a_2x + 6a_1y \\ 6a_2x + 6a_1y & 6a_1x + 6a_0y \end{pmatrix} \\ &= 36\left((a_3a_1 - a_2^2)x^2 + (a_3a_0 - a_2a_1)xy + (a_2a_0 - a_1^2)y^2\right). \end{aligned}$$

1.2.3 Covarianti

Consideriamo di nuovo le $n-$iche binarie

$$f(x,y) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a_i x^i y^{n-i}$$

che sotto sostituzioni lineari nonsingolari

$$\begin{cases} x = c_{11}\overline{x} + c_{12}\overline{y} \\ y = c_{21}\overline{x} + c_{22}\overline{y} \end{cases}, \qquad \det(c) \neq 0$$

si trasformano in nuove $n-$iche binarie

$$\overline{f}(\overline{x},\overline{y}) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \overline{a}_i \overline{x}^i \overline{y}^{n-i}$$

in modo che
$$f(x,y) = \overline{f}(\overline{x}, \overline{y}).$$
Un polinomio $I(A_0, \ldots, A_n; X, Y)$ in indeterminate $A_0, \ldots, A_n, X, Y$ si dice *covariante di indice* g (intero non negativo) delle $n-$iche binarie se e solo se

$$I(\overline{a}_0, \ldots, \overline{a}_n; \overline{x}, \overline{y}) = \det(c)^g I(a_0, \ldots, a_n; x, y)$$

per ogni a_i e $\overline{a}_i$ ed ogni x, y e $\overline{x}, \overline{y}$ legate dalle relazioni di sopra; se I e' $d-$omogeneo nel complesso delle indeterminate $A_0, \ldots, A_n$ ed e' $t-$omogeneo nel complesso delle X, Y, allora si dice che I e' omogeneo di grado d e ordine t. Si noti che gli invarianti delle $n-$iche binarie si possono identificare con i covarianti delle $n-$che binarie nei quali non compaionio le indeterminate X, Y.

In breve, possiamo esprimere e generalizzare questa definizione e notazione come segue: il nostro discorso riguarda le $n-$iche $m-$arie, e le sostituzioni lineari nonsingolari delle m variabili; per ciascuna data sostituzione lineare c delle variabili x in funzione delle $\overline{x}$, ad ogni $n-$ica $m-$aria f corrisponde una nuova $n-$ica $m-$aria $\overline{f}$; una funzione polinomiale I delle $n-$iche $m-$arie e delle variabili si dice covariante di indice g (intero non negativo) se e solo se
$$I(\overline{f}, \overline{x}) = \det(c)^g I(f, x),$$
per ogni f, x ed ogni c.
Per ciascuna funzione polinomiale I delle $n-$iche $m-$arie e di una $m-$pla di scalari, la condizione

$$I(\overline{f}, \overline{x}) = \det(c)^g I(f; x), \quad \forall f, x, c$$

equivale alla condizione

$$\forall c \ \ \exists \varphi(c) \in \mathbb{K}: \quad I(\overline{f}, \overline{x}) = \varphi(c) I(f, x), \quad \forall f, x.$$

Questa affermazione, fatta di passaggio per gli invarianti nella lezione precedente, segue da una considerazione elementare e da un argomento non elementare. Precisamente: consideriamo una qualsiasi funzione polinomiale non nulla I soddisfacente la seconda condizione, ed osserviamo che
-per ogni due sostituzioni, c delle x in funzione delle $\overline{x}$, e d delle $\overline{x}$ in funzione delle $\overline{\overline{x}}$, e per la sostituzione composta cd delle x in funzione delle $\overline{\overline{x}}$, si ha

$$I(\overline{\overline{f}}, \overline{\overline{x}}) = \varphi(d) I(\overline{f}, \overline{x}) = \varphi(d)\varphi(c) I(f, x)$$

e
$$I(\overline{\overline{f}}, \overline{\overline{x}}) = \varphi(cd) I(f, x);$$
dunque $\varphi(cd) = \varphi(c)\varphi(d)$ per ogni c, d.
-si ha dunque un morfismo polinomiale $\varphi : GL(m) \to \mathbb{K}^\times$; si puo' provare che allora φ e' una potenza del determinante ad esempio usando il fatto di base che per la matrice $c^\#$ trasposta della matrice dei complementi algebrici della c si ha $c^\# c = \det(c) I$, e il teorema secondo il quale il determinante e' un polinomio irriducibile.

Osserviamo che
- la somma di due covarianti di uno stesso indice g di $n-$iche $m-$arie e' ancora un covariante di indice g di $n-$iche $m-$arie;
- il prodotto di due covarianti di indice g_1 e g_2 di $n-$iche $m-$arie e' ancora un covariante, di indice $g_1 + g_2$, di $n-$iche $m-$arie.

Esempio. Il polinomio
$$F(A_0, \ldots, A_n; X, Y) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} A_i X^i Y^{n-i}$$
e' un covariante di indice 0 delle $n-$iche binarie, in quanto per definizione si ha
$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \overline{a}_i \overline{x}^i \overline{y}^{n-i} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a_i x^i y^{n-i}$$
per ogni ...; ha grado 1 e ordine n. Questo fatto vale per ogni quantica; classicamente si esprimeva dicendo che "ogni quantica e' covariante di se' stessa."

Esempio. Il polinomio Hessiano
$$\mathcal{H}(f; x)$$
e' un covariante di indice 2 delle $n-$iche $m-$arie; ha grado m e ordine $m(n-2)$.

1.2.4 Relazione fra grado, ordine e indice di un covariante

Sia $I(A_0, \ldots, A_n, X, Y)$ un covariante delle $n-$iche binarie, di indice g, grado d e ordine t. Per ciascuna data sostituzione del tipo $x = \lambda \overline{x}$, $y = \lambda \overline{y}$, con

$\lambda \in \mathbb{K}$, per ciascuna $n-$ica binaria $f(x,y)$ si ha

$$\overline{f}(\overline{x},\overline{y}) = f(x,y) = f(\lambda\overline{x},\lambda\overline{y}) = \lambda^n f(\overline{x},\overline{y})$$

da cui $\overline{a}_i = \lambda^n a_i$ per ogni $i = 0,\ldots,n$. Da una parte, essendo $I(A_0,\ldots,A_n,X,Y)$ un polinomio di grado d e ordine t, si ha

$$I(\overline{a}_0,\ldots,\overline{a}_n;\overline{x},\overline{y}) = I(\lambda^n a_0,\ldots,\lambda^n a_n;\lambda^{-1}x,\lambda^{-1}y) = \lambda^{nd-t} I(a_0,\ldots,a_n;x,y)$$

Dall'altra, essendo $I(A_0,\ldots,A_n,X,Y)$ un covariante di indice g si ha si ha

$$I(\overline{a}_0,\ldots,\overline{a}_n;\overline{x},\overline{y}) = (c^2)^g I(a_0,\ldots,a_n;x,y).$$

Dunque si ha la relazione

$$nd - t = 2g.$$

1.2.5 Covarianti congiunti

Piu' in generale, possiamo considerare sequenze di quantiche $m-$arie di dati gradi $n_1,n_2,\ldots$; per ciascuna data sostituzione lineare nonsingolare c della $m-$pla di variabili x in funzione di una $m-$pla di variabili $\overline{x}$, a ciascuna sequenza $f_1,f_2,\ldots$ di quantiche $m-$arie di gradi $n_1,n_2,\ldots$ corrisponde una sequenza $\overline{f}_1,\overline{f}_2,\ldots$ di quantiche $m-$arie di gradi $n_1,n_2,\ldots$; una funzione polinomiale I di una sequenza di quantiche $m-$arie di dati gradi $n_1,n_2,\ldots$ e delle variabili si dice covariante congiunto di indice g (intero non negativo) se e solo se

$$I(\overline{f}_1,\overline{f}_2,\ldots;\overline{x}) = \det(c)^g I(f_1,f_2,\ldots;x),$$

per ogni $f_1,f_2,\ldots,x$ ed ogni c.

1.2.6 Esercizio

Utilizzando il fatto che ogni quantica e' covariante di se' stessa, cioe' $\overline{f}(\overline{x}) = f(x)$ per ogni ..., ed utilizzando l'espansione di Taylor

$$f(x+y) = f(x) + grad(f,x)\cdot y + \frac{1}{2}y^T H(f,x)y + \ldots,$$

si mostri che l'Hessiano $\mathcal{H}(f,x) = \det H(f,x)$ e' un covariante di indice 2.

Chapter 2

Rifondazione ed ampliamento del discorso

2.1 III lezione

2.1.1 Invarianti relativi e assoluti di un gruppo

In questa lezione ampliamo il discorso e lo riformuliamo in termini piu' moderni, seguendo sostanzialmente l'impostazione data alla teoria negli anni 30 da H. Weyl; aggiungiamo alla bibliografia, come riferimento da tenere d'occhio per l'inquadramento generale,

> [W] H. Weyl, The classical groups; Princeton mathematical series, 1; Princeton: Princeton University Press, 1939, 1946

D'ora innanzi fino ad avviso contrario il riferimento principale sara' [G].

Sia $\mathbb{K}$ un campo infinito; per brevita', al posto di $\mathbb{K}-$spazio vettoriale, applicazione $\mathbb{K}-$lineare, $\mathbb{K}-$algebra, ... diremo spazio vettoriale, applicazione lineare, algebra, ... Sia W uno spazio vettoriale di dimensione finita n, e sia $\mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n]$ l'algebra dei polinomi in n indeterminate $X_1, \ldots, X_n$. Una funzione $f : W \to \mathbb{K}$ si dice *funzione polinomiale su* W se e solo se esiste una base $e_1, \ldots, e_n$ di W ed esiste un polinomio $p \in \mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n]$ tale che $f(a_1e_1 + \cdots + a_ne_n) = p(a_1, \ldots, a_n)$ per ogni $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^n$; la locuzione "esiste una base" puo' essere equivalentemente sostituita dalla locuzione "per ogni base". Si ha inoltre che tutti i polinomi che rappresentano una stessa funzione polinomiale f hanno lo stesso grado, che viene dunque attribuito alla funzione f. L'insieme $\mathbb{K}[W]$ delle funzioni polinomiali su W e' una sottoalgebra dell'algebra delle funzioni da W a $\mathbb{K}$, piu' precisamente e' la sottoalgebra generata dai funzionali lineari. Per ogni base fissata di W c'e' quasi per definizione un epimorfismo

$$\mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n] \to \mathbb{K}[W];$$

essendo $\mathbb{K}$ un campo infinito, questo e' in realta' un isomorfismo. Da un punto di vista piu' intrinseco, c'e' un isomorfismo

$$Sym[W^*] \to \mathbb{K}[W].$$

Sia G un gruppo fissato. Uno spazio vettoriale W con un'operazione esterna

$$G \times W \to W, \quad (g, w) \mapsto g \cdot w,$$

compatibile con le strutture di G e W si dice $G-$spazio vettoriale. Una funzione polinomiale $f \in \mathbb{K}[W]$ si dice *invariante relativo di peso* χ di W se e solo se

$$f(g \cdot w) = \chi(g) f(w), \quad \forall w \in W,\ g \in G,$$

dove χ e' un carattere di G in $\mathbb{K}$, cioe' un omomorfismo $\chi : G \to \mathbb{K}^\times$; se $\chi \equiv 1_\mathbb{K}$ e' il carattere banale, cioe' se

$$f(g \cdot w) = f(w), \quad \forall w \in W,\ g \in G,$$

allora f si dice *invariante assoluto* di W.

Si ha che
-l'insieme $\mathbb{K}[W]^G$ degli invarianti assoluti di W e' una sottoalgebra di $\mathbb{K}[W]$;
-la chiusura additiva $\mathbb{K}[W]^{G,\cdot}$ dell'insieme degli invarianti relativi di W e' una sottoalgebra di $\mathbb{K}[W]$;
-$\mathbb{K}[W]^G \subseteq \mathbb{K}[W]^{G,\cdot}$.

Fissato un gruppo G, ci si pone il problema di descrivere le algebre degli invarianti (relativi) di tutti i $G-$moduli.

2.1.2 Quali gruppi e quali moduli consideriamo

Come campo $\mathbb{K}$, consideriamo un campo di caratteristica zero - avendo cura di mettere in evidenza i punti del nostro discorso nei quali si usa questa ipotesi.

Come gruppo G, siamo interessati ai gruppi generali lineari $\mathrm{GL}_m(\mathbb{K})$ e ai gruppi speciali lineari $\mathrm{SL}_m(\mathbb{K})$ - la teoria per questi due tipi di gruppi e' sostanzialmente la stessa. I gruppi speciali lineari $\mathrm{SL}_m(\mathbb{K})$, speciali ortogonali $SO_m(\mathbb{K})$, simplettici $Sp_m(\mathbb{K})$ sono detti *gruppi classici*; nel caso in cui $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ sono gli esempi fondamentali di gruppi di Lie semisemplici.

Il gruppo G agisce per moltiplicazione sullo spazio $V = \mathbb{K}^m$ dei vettori colonna: $g \cdot v = gv$. Come moduli, siamo interessati ai $G-$moduli ottenuti a partire da V mediante le seguenti costruzioni naturali:
-passaggio al duale W^*;
-somma diretta $W \oplus Z$;
-prodotto tensoriale $W \otimes Z$;
-potenza simmetrica $Sym[W]_n$;
-potenza esterna $\Lambda[W]_n$.
I caratteri $\chi : \mathrm{GL}_m(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}^\times$ che effettivamente compaiono sono del tipo $\chi(g) = \det(g)^p$, con $p \in \mathbb{Z}$.

Posto $G = \mathrm{GL}_m(\mathbb{K})$ e $G' = \mathrm{SL}_m(\mathbb{K})$, per ciascuno di questi moduli si ha:
-ogni $G-$invariante relativo e' anche un $G'-$invariante assoluto;
-ogni $G'-$invariante assoluto e' somma di $G'-$invarianti omogenei;
-ogni $G'-$invariante assoluto omogeneo e' anche un $G-$invariante relativo.
Di conseguenza, per ciascuno di questi moduli W, l'algebra associata agli invarianti relativi di G coincide con l'algebra degli invarianti assoluti di G' :

$$\mathbb{K}[W]^{G,\cdot} = \mathbb{K}[W]^{G'}.$$

2.1.3 Riformulazione delle definizioni date nelle lezioni precedenti

Consideriamo il gruppo $G = \mathrm{GL}_m(\mathbb{K})$, e lo spazio vettoriale $V = \mathbb{K}^m$ di vettori colonna sul quale G agisce per moltiplicazione $g \cdot v = gv$, per ogni ... L'insieme delle $n-$iche $m-$arie su $\mathbb{K}$ coincide con l'insieme $\mathbb{K}[V]_n \cong Sym[V^*]_n$ delle funzioni polinomiali di grado n su V, che e' uno spazio vettoriale con un'azione naturale di G definita da $(g \cdot f)(x) = f(g^{-1} \cdot x)$, per ogni ...; l'insieme delle coppie costituite da una $n-$ica $m-$aria e da una variabile $m-$aria su $\mathbb{K}$ coincide con l'insieme $\mathbb{K}[V]_n \oplus V$ che e' uno spazio vettoriale con un'azione naturale di G definita da $g \cdot (f, x) = (g \cdot f, g \cdot x)$, per ogni ....

Un covariante di indice p (intero non negativo) di una $n-$ica $m-$aria e di una variabile $m-$aria e' una funzione polinomiale $I \in \mathbb{K}[\mathbb{K}[V]_n \oplus V]$ che e' un invariante relativo di $\mathrm{GL}_m(\mathbb{K})$, di peso $\chi : \mathrm{GL}_m(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}^\times$ dato da $\chi(g) = \det(g)^{-p}$, cioe' tale che

$$I(g \cdot f, g \cdot v) = \det(g)^{-p} I(f, v),$$

per ogni g, f, v.

(Questa affermazione si puo' motivare come segue. Un covariante di indice p (intero non negativo) di una $n-$ica $m-$aria f e di una variabile $m-$aria x e' una funzione polinomiale $I(f, x)$ che soddisfa la condizione

$$I(\overline{f}, \overline{x}) = \det(g)^p I(f, x),$$

per ogni $g \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{K})$ ed ogni f, x ed $\overline{f}, \overline{x}$ legate dalle relazioni $x = g\overline{x}$ e $\overline{f}(\overline{x}) = f(x)$; queste relazioni possono essere scritte come $\overline{x} = g^{-1}x$ e $\overline{f}(\overline{x}) = (g^{-1} \cdot f)(\overline{x})$; dunque la condizione su I si puo' riscrivere come

$$I(g^{-1} \cdot f, g^{-1} \cdot x) = \det(g)^p I(f, x), \quad \forall g, x, f;$$

e questa condizione e' equivalente a quella affermata.)

Piu' in generale, possiamo considerare covarianti di piu' quantiche e di piu' variabili, possiamo cioe' considerare invarianti di $G-$moduli del tipo

$$\left(\bigoplus_i K[V]_{n_i} \right) \oplus V \oplus V \oplus \cdots \oplus V.$$

Chapter 3

Invarianti vettoriali

3.1 III lezione (continua)

3.1.1 Invarianti vettoriali

Consideriamo il gruppo $G = \mathrm{SL}_m(\mathbb{K})$, il $G-$modulo definitorio $V = \mathbb{K}^m$, e un $G-$modulo

$$\oplus^p V = V \oplus V \oplus \cdots \oplus V \quad (p \text{ } volte).$$

Ciascun elemento di $\oplus^p V$ e' una sequenza $(v_1, v_2, \ldots, v_p)$ di p vettori $v_i \in V$, e puo' essere identificato con una matrice $m \times p$ in $\mathrm{M}_{m\times p}(\mathbb{K})$; all'azione di G su $\oplus^p V$ data da $g \cdot (v_1, \ldots, v_p) = (g \cdot v_1, \ldots, g \cdot v_p)$, corrisponde l'azione per moltiplicazione di G su $\mathrm{M}_{m\times p}(\mathbb{K})$.
L'algebra $\mathbb{K}[\oplus^p V]$ delle funzioni polinomiali su $\oplus^p V$ puo' essere identificata con l'algebra $\mathbb{K}[\mathrm{M}_{m\times p}(\mathbb{K})]$ delle funzioni polinomiali su $\mathrm{M}_{m\times p}(\mathbb{K})$, che e' generata dall'insieme dei funzionali $x_{ij} : \mathrm{M}_{m\times p}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ che leggono le componenti delle matrici; a sua volta, quest'algebra puo' essere identificata con l'algebra dei polinomi $\mathbb{K}[X_{ij}]$. Gli invarianti assoluti del $G-$modulo $\oplus^p V = \mathrm{M}_{m\times p}(\mathbb{K})$ sono detti *invarianti vettoriali* di G; interessa essenzialmente il caso $p \geq m$ ed e' pure naturale prendere $p = +\infty$.

Per ogni sequenza $(1 \leq) j_1 < j_2 < \ldots < j_m (\leq p)$ di m indici di colonna, consideriamo la funzione polinomiale

$$[j_1, j_2, \ldots, j_m] : \oplus^p V \to \mathbb{K}, \qquad (v_1, v_2, \ldots, v_p) \mapsto \det(v_{j_1}, v_{j_2}, \ldots, v_{j_m}),$$

ed osserviamo che e' un invariante assoluto:

$$
\begin{aligned}
g(v_1, \ldots, v_p) = (gv_1, \ldots, gv_p) &\mapsto \det(gv_{j_1}, \ldots, gv_{j_m}) \\
&= \det\left(g(v_{j_1}, \ldots, v_{j_m})\right) = \det(g)\det(v_{j_1}, \ldots, v_{j_m}) = \det(v_{j_1}, \ldots, v_{j_m}).
\end{aligned}
$$

Queste funzioni polinomiali vengono dette *brackets*; come vedremo, sono gli invarianti vettoriali fondamentali.

Esercizio. Si descriva l'algebra degli invarianti $\mathbb{K}[\oplus^p V]$ per ciascun $p \leq m$.

3.2 Lezione IV, V

3.2.1 Irrilevanza delle disuguaglianze algebriche

Sia $\mathbb{K}$ un campo infinito. Se $f \in \mathbb{K}[X]$ e' un polinomio nell'indeterminata X su $\mathbb{K}$, tale che $f(x) = 0$ per ogni $x \in \mathbb{K}$ tranne al piu' un numero finito di valori di x, allora $f(x) = 0$ per ogni $x \in \mathbb{K}$, e $f = 0$ in $\mathbb{K}[X]$. Piu' in generale, si ha

Principle 1 (Irrilevanza delle disuguaglianze algebriche (H. Weyl))**.** *Sia $\mathbb{K}$ un campo infinito, e siano $P, R_1, \ldots, R_m \in \mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n]$, con $R_1, \ldots, R_m \neq 0$; se*

$$\begin{aligned} P(x_1, \ldots, x_n) = 0 \quad & \forall (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n \quad t.c. \\ & R_1(x_1, \ldots, x_n) \neq 0, \ldots, R_m(x_1, \ldots, x_n) \neq 0, \end{aligned}$$

allora $P(x_1, \ldots, x_n) = 0 \ \forall (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, e

$$P = 0 \ \ in \ \ \mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n].$$

Dunque, per ogni $P, Q, R_1, \ldots, R_m \in \mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n]$ con $R_1, \ldots, R_m \neq 0$, se

$$\begin{aligned} P(x_1, \ldots, x_n) = Q(x_1, \ldots, x_n) \quad & \forall (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n \quad t.c. \\ & R_1(x_1, \ldots, x_n) \neq 0, \ldots, R_m(x_1, \ldots, x_n) \neq 0, \end{aligned}$$

allora $P(x_1, \ldots, x_n) = Q(x_1, \ldots, x_n) \ \forall (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, e

$$P = Q \ \ in \ \ \mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n].$$

3.2.2 Terminologia

Sia G un gruppo e sia W un $G-$modulo; l'azione di G su W induce una relazione d'equivalenza su W, data da $v \sim_G u$ se e solo se esiste $g \in G$ tale che $v = g \cdot u$; indichiamo l'insieme quoziente di W rispetto a questa relazione d'equivalenza, cioe' l'insieme delle orbite $G \cdot u = \{g \cdot u; \ g \in G\}$, $(u \in W)$, con W/G. Una funzione polinomiale $f \in K[W]$ e' un invariante assoluto rispetto a G se e solo se f e' compatibile con la relazione d'equivalenza $\sim_G$ se e solo se f e' costante sulle $G-$orbite.

3.2.3 Orbite di sequenze di vettori, o matrici.

Sia $v = (v_1, \ldots, v_p)$ la matrice $m \times p$ avente per colonne i p vettori $v_j \in \mathbb{K}^m$. Possiamo descrivere in modo intrinseco la sequenza $(v_1, v_2, \ldots, v_p)$ come segue. La sequenza inizia con qualche vettore nullo fino a che si ha un primo vettore $v_{j_1} \neq 0$, poi prosegue con qualche vettore che e' multiplo scalare di v_{j_1} fino a che si ha un primo vettore v_{j_2} che non e' multiplo scalare di v_{j_1}, poi prosegue con qualche vettore che e' combinazione lineare di v_{j_1} e v_{j_2} fino a che si ha un primo vettore v_{j_3} che non e' combinazione lineare di v_{j_1}, v_{j_2}, poi ... (per semplicita', qui il termine "qualche" puo' significare anche "nessuno"). Siano $v_{j_1}, v_{j_2}, \ldots, v_{j_r}$ i vettori cosi' evidenziati; chiaramente, r e' il rango dell'insieme dei vettori dati.
Agendo su ciascun vettore della sequenza $(v_1, v_2, \ldots, v_p)$ con una matrice $g \in \mathrm{GL}_m$, possiamo trasformare $v_{j_1}, v_{j_2}, \ldots, v_{j_r}$ nei primi r vettori della base canonica $e_1, e_2, \ldots, e_r$; la nuova sequenza $(w_1, w_2, \ldots, w_p)$ cosi' ottenuta e' la sequenza delle colonne una matrice del tipo

$$\begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & 1 & * & \ldots & * & 0 & * & \ldots & * & 0 & * & \ldots \\ 0 & & & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & * & \ldots & * & 0 & * & \ldots \\ 0 & & & & & & & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & * & \ldots \\ 0 & & & & & & & & & & & 0 & 0 & \ldots \\ \vdots & & & & & & & & & & & \vdots & & \end{pmatrix}.$$

Una matrice di questo tipo si dice matrice a scala ridotta; possiamo dunque dire che ciascuna orbita di una matrice $m \times p$ rispetto a GL_m contiene una matrice a scala ridotta; chiaramente tale matrice e' unica. Le matrici $m \times p$ a scala ridotta si possono riguardare come forme canoniche delle matrici $m \times p$ sotto l'azione di GL_m.
Osserviamo che, se le prime m colonne di una matrice sono linearmente indipendenti, allora la sua forma canonica e' data da una matrice del tipo

$$\begin{pmatrix} 1 & & 0 & * & \ldots \\ & \ddots & & \vdots & \ldots \\ 0 & & 1 & * & \ldots \end{pmatrix}.$$

Osserviamo infine che due matrici $v = (v_1, \ldots, v_p)$ e $w = (w_1, \ldots, w_p)$ di rango m stanno nella stessa orbita rispetto a GL_m se e solo se le famiglie dei minori di ordine m delle due matrici sono fra loro proporzionali; in altri termini, esiste una costante $\rho \neq 0$ tale che per ogni sequenza $j_1, \ldots, j_m$ di interi distinti fra 1 e p, si ha

$$\det(v_{j_1}, \ldots, v_{j_m}) = \rho \det(w_{j_1}, \ldots, w_{j_m}).$$

Descriviamo ora l'analogo processo per SL_m. Se $r < m$, agendo su ciascun vettore della sequenza $(v_1, v_2, \ldots, v_p)$ con una matrice $g \in \mathrm{SL}_m$, possiamo ancora trasformare $v_{j_1}, v_{j_2}, \ldots, v_{j_r}$ nei primi r vettori della base canonica $e_1, e_2, \ldots, e_r$; se $r = m$, agendo su ciascun vettore della sequenza $(v_1, v_2, \ldots, v_p)$ con una matrice $g \in \mathrm{SL}_m$, possiamo trasformare la sequenza $v_{j_1}, v_{j_2}, \ldots, v_{j_m}$ nella sequenza $e_1, \ldots, e_{m-1}, be_m$, dove

$$b = \det(v_{j_1}, v_{j_2}, \ldots, v_{j_m}).$$

La nuova sequenza di vettori $(w_1, w_2, \ldots, w_p)$ cosi' ottenuta e' la sequenza delle colonne di un tipo di matrice che si dice matrice a scala quasi ridotta; possiamo dunque dire che ciascuna orbita di matrici $m \times p$ rispetto a SL_m contiene una matrice a scala quasi ridotta; chiaramente tale matrice e' unica. Le matrici $m \times p$ a scala quasi ridotta si possono dunque riguardare come forme canoniche delle matrici $m \times p$ sotto l'azione di SL_m.
Osserviamo che, se le prime m colonne di una matrice sono linearmente indipendenti, allora la sua forma canonica e' data da una matrice del tipo

$$\begin{pmatrix} 1 & & 0 & * & \ldots \\ & \ddots & & \vdots & \ldots \\ 0 & & b & * & \ldots \end{pmatrix},$$

dove $b = \det(v_1, \ldots, v_m)$.

Osserviamo infine che due matrici $v = (v_1, \ldots, v_p)$ e $w = (w_1, \ldots, w_p)$ di rango m stanno nella stessa orbita rispetto a SL_m se e solo se hanno la stessa famiglia dei minori di ordine m; in altri termini, per ogni sequenza $j_1, \ldots, j_m$ di interi distinti fra 1 e p, si ha

$$\det(v_{j_1}, \ldots, v_{j_m}) = \det(w_{j_1}, \ldots, w_{j_m}).$$

3.2.4 SL_m−invarianti di $p \leq m$ vettori.

Consideriamo il gruppo $G = \mathrm{SL}_m$, lo spazio vettoriale $V_m = \mathbb{K}^m$, e il G−modulo $\oplus^p V_m \cong \mathrm{M}_{m \times p}$.

-Consideriamo il caso $p < m$. Osserviamo che tutte le matrici $v = (v_1, \ldots, v_p)$ di rango massimo p hanno la stessa forma canonica $e = (e_1, \ldots, e_p)$, dove gli e_j sono i primi p vettori della base canonica di V_m; in particolare, cio' vale per le matrici v tali che il minore $Q(v)$ delle prime p righe sia non nullo.
Sia ora $F \in K[\mathrm{M}_{m\times p}]$ un $G-$invariante assoluto e sia $F(e) = c$ il valore assunto da F sulla matrice e; si ha che

$$F(v) = c, \qquad \forall v \in \mathrm{M}_{m\times p} \;\; t.c. \;\; Q(v) \neq 0.$$

Per il principio di irrilevanza delle disuguaglianze algebriche, si ha dunque $F(v) = c$ per ogni $v \in \mathrm{M}_{m\times p}$. Dunque in questo caso si ha

$$\mathbb{K}[\mathrm{M}_{m\times p}]^G \simeq \mathbb{K}.$$

-Consideriamo il caso $p = m$. Osserviamo che ciascuna matrice $v = (v_1, \ldots, v_m)$ nonsingolare ha una forma canonica data da

$$e(v) = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \det(v) \end{pmatrix}.$$

Sia ora $F \in K[\mathrm{M}_{m\times m}]$ un $G-$invariante assoluto; per ogni matrice $v \in \mathrm{M}_{m\times m}$ si ha che

$$F(v) = F(e(v)), \qquad \forall v \in \mathrm{M}_{m\times m} \;\; t.c. \;\; \det(v) \neq 0.$$

Essendo tutti gli elementi di $e(v)$ costanti tranne $\det(v)$, e per il principio di irrilevanza delle disuguaglianze algebriche si ha

$$F(e(v)) = (\textit{polinomio in } \det)(v), \qquad \forall v \in \mathrm{M}_{m\times m}$$

Dunque in questo caso si ha

$$\mathbb{K}[\mathrm{M}_{m\times m}]^G \simeq \mathbb{K}[\det].$$

Esercizio Ragionando come sopra, cosa si puo' arrivare ad affermare nel caso $p > m$?

3.2.5 I e II Teorema fondamentale

.
Consideriamo il gruppo $G = \mathrm{SL}_m$, lo spazio vettoriale $V_m = \mathbb{K}^m$, e il $G-$modulo $\oplus^p V_m \cong \mathrm{M}_{m\times p}$. Ricordiamo che la funzione polinomiale che ad ogni matrice $m \times p$ (con $p \geq m$) associa il determinante dellla sottomatrice $m \times m$ ottenuta accostando le colonne j_1-ma, j_2-ma, ..., j_m-ma (m colonne distinte, non necessariamente in ordine) viene detta bracket e viene indicata con $[j_1, \ldots, j_m]$; in altri termini, per ogni matrice $v = (v_1, \ldots, v_p)$ si ha

$$[j_1, \ldots, j_m](v) = \det(v_{j_1}, \ldots, v_{j_m}).$$

Abbiamo visto che le bracket sono SL_m-invarianti.
Il I teorema fondamentale afferma che le bracket sono un sistema (finito) di generatori d'algebra per l'algebra degli invarianti, e il II teorema fondamentale fornisce tutte le relazioni algebriche fra le bracket.
La versione classica di questi teoremi e' nel caso di campi di caratteristica zero. Negli anni '50 Igusa estese questi teoremi ai campi infiniti, dal punto di vista della geometria algebrica, e negli anni '70 Rota e collaboratori diedero una dimostrazione di questi teoremi stabilendo l'algoritmo di straightening, che fornisce una base lineare sugli interi adeguata agli aspetti rappresentazionistici e invariantistici dell'anello $\mathbb{Z}[X_{ij}]$ dei polinomi a coefficienti interi negli elementi di una matrice generica. Per una discussione ampia e approfondita di tutti questi aspetti cfr. [G]. Di seguito riportiamo gli enunciati di questi due teoremi. Piu' avanti daremo una dimostrazione.

Theorem 1 (I Teorema Fondamentale)**.** *Sia $\mathbb{K}$ un campo infinito. L'algebra $\mathbb{K}[\oplus^p V_m]^{\mathrm{SL}_m}$ degli SL_m-invarianti di p vettori in dimensione m e' generata, come algebra, dalle bracket $[j_1, \ldots, j_m]$, associate alle $m-$ple $j_1, \ldots, j_m$ di interi distinti compresi fra 1 e p.*

Sia S l'algebra dei polinomi nelle variabili $\{j_1, \ldots, j_m\}$ associate ad $m-$ple $j_1, \ldots, j_m$ di interi distinti compresi fra 1 e p, e sia

$$\phi : S \to \mathbb{K}[\oplus^p V_m]^{\mathrm{SL}_m}$$

il morfismo d'algebra tale che

$$\phi\{j_1, \ldots, j_m\} = [j_1, \ldots, j_m],$$

per ogni $j_1, \ldots, j_m$ soggette alle condizioni dovute. Il I teorema fondamentale afferma che questo morfismo e' suriettivo. Il II teorema fondamentale fornisce un sistema di generatori d'ideale per il nucleo $Ker\phi$.

Le bracket soddisfano delle relazioni che derivano direttamente dagli sviluppi di Laplace dei determinanti, o equivalentemente dalla regola di Cramer per la soluzione di sistemi nonsingolari. Nel seguito, per abuso di notazione, usiamo il simbolo di bracket per indicare il determinante di una sequenza di m vettori in V_m.

La regola di Cramer si puo' esprimere nel modo seguente. Siano $u_1, \ldots, u_m$ m vettori in V_m, con $[u_1, \ldots, u_m] \neq 0$; allora ciascun vettore $w \in V_m$ si puo' scrivere in uno ed un solo modo come

$$w = \sum_1^m r_i u_i, \quad dove \quad r_i = \frac{[u_1, \ldots, w, \ldots, u_m]}{[u_1, \ldots, u_m]}, \quad (w\ in\ i-ma\ posizione).$$

Dunque si ha

$$w = \sum_1^m \frac{[u_1, \ldots, w, \ldots, u_m]}{[u_1, \ldots, u_m]} u_i, \quad cioe' \quad [u_1, \ldots, u_m]w = \sum_1^m [u_1, \ldots, w, \ldots, u_m]u_i.$$

Dunque, per ogni $u_1, \ldots, u_m \in V_m$ tali che $[u_1, \ldots, u_n] \neq 0$ ed ogni $w, w_2, \ldots, w_m \in V_m$ si ha l'uguaglianza fra bracket

$$[u_1, \ldots, u_m][w, w_2, \ldots, w_m] = \sum_1^m [u_1, \ldots, w, \ldots, u_m][u_i, w_2, \ldots, w_m].$$

Per il principio di irrilevanza delle disuguaglianze algebriche, questa uguaglianza vale sempre.

(Il fatto che, sotto la condizione $[u_1, \ldots, u_m] \neq 0$, l'unica possibile soluzione dell'equazione vettoriale $w = \sum_1^m r_i u_i$ nelle incognite scalari r_i sia data dalle espressioni della regola di Cramer deriva direttamente dalle proprieta' di multilinearita' e alternanza della bracket. Infatti, l'uguaglianza fra vettori $w = \sum_1^m r_i u_i$ implica l'uguaglianza fra scalari

$$[w, u_2, \ldots, u_n] = [\sum_1^m r_i u_i, u_2, \ldots, u_n] = \sum_1^m r_i [u_i, u_2, \ldots, u_n] = r_1 [u_1, u_2, \ldots, u_n]$$

dalla quale si ottiene l'espressione di r_1; in modo analogo si ottengono le espressioni degli altri scalari r_i.)

Theorem 2 (II teorema fondamentale; I). *Sia $\mathbb{K}$ un campo di caratteristica 0. Il nucleo dell'epimorfismo $\phi : S \to \mathbb{K}[\oplus^p V_m]^{\mathrm{SL}_m}$ indotto dalle $\phi\{j_1, \ldots, j_m\} = [j_1, \ldots, j_m]$, e' generato, come ideale, dagli elementi del tipo*

$$\{i_1, \ldots, i_m\} - (-)^\sigma \{i_{\sigma(1)}, \ldots, i_{\sigma(m)}\}$$
$$\{i_1, \ldots, i_m\}\{j_1, \ldots, j_m\} - \sum_{h=1}^{m} \{i_1, \ldots, j_1, \ldots, i_m\}\{i_h, j_2, \ldots, j_m\},$$

dove: per gli elementi del primo tipo, σ varia fra le permutazioni di $1, \ldots, m$; per gli elementi del secondo tipo, le sequenze $i_1, \ldots, i_m$ e $j_1, \ldots, j_m$ variano fra le sequenze di m interi distinti compresi fra 1 e p.

Gli elementi del secondo tipo possono essere riscritti nella forma

$$\sum_\sigma (-)^\sigma \{j_{\sigma(2)}, j_{\sigma(3)}, \ldots, j_{\sigma(m+1)}\}\{j_{\sigma(1)}, h_2, \ldots, h_m\}$$

dove la somma e' estesa a tutte le permutazioni σ dell'insieme degli interi da 1 a $m+1$, soggette alla condizione $\sigma(2) < \sigma(3) < \ldots < \sigma(m+1)$.

Theorem 3 (II teorema fondamentale; II). *Sia $\mathbb{K}$ un campo infinito. Il nucleo dell'epimorfismo $\phi : S \to \mathbb{K}[\oplus^p V_m]^{\mathrm{SL}_m}$ indotto dalle $\phi\{j_1, \ldots, j_m\} = [j_1, \ldots, j_m]$, e' generato, come ideale, dagli elementi del tipo*

$$\{i_1, \ldots, i_m\} - (-)^\sigma \{i_{\sigma(1)}, \ldots, i_{\sigma(m)}\}$$
$$\sum_\sigma (-)^\sigma \{i_1, \ldots, i_{t-1}, j_{\sigma(t+1)}, \ldots, j_{\sigma(m+1)}\}\{j_{\sigma(1)}, \ldots, j_{\sigma(t)}, h_{t+1}, \ldots, h_m\},$$

dove: per gli elementi del primo tipo, σ varia fra le permutazioni di $1, \ldots, m$; per gli elementi del secondo tipo, ciascun elemento e' parametrizzato da un intero t fra 1 ed m e tre sequenze $j_1, j_2, \ldots, j_{m+1}$, $i_1, \ldots, i_{t-1}$, $h_{t+1}, \ldots, h_m$, ciascuna di interi distinti fra 1 e p; per ciascun elemento, la sommatoria e' estesa a tutte le permutazioni σ degli interi da 1 a $m+1$ tali che $\sigma(1) < \ldots < \sigma(t)$ e $\sigma(t+1) < \ldots < \sigma(m+1)$.

3.2.6 Relazione con le varieta' Grassmanniane, cenni

Sia V_p uno spazio vettoriale di dimensione p (i cui vettori pensiamo come vettori riga). Siamo interessati a descrivere l'insieme $\mathrm{L}_m(V_p)$ dei sottospazi di V_p aventi una data dimensione m. Possiamo costruire ciascuno di questi sottospazi prendendo m vettori riga $a'_1, a'_2, \ldots, a'_m$ linearmente indipendenti in V_p e considerando la loro chiusura lineare $\langle a'_1, a'_2, \ldots, a'_m \rangle$. In altri termini, indicato con $\mathrm{M}^\circ_{m\times p}$ l'insieme delle matrici di tipo $m \times p$ e rango m, si ha una funzione suriettiva

$$R : \mathrm{M}^\circ_{m\times p} \to \mathrm{L}_m(V_p)$$

che ad ogni matrice A associa il sottospazio $R(A)$ generato dalle righe di A. Osserviamo che

$$R(B) = R(A) \quad sse \quad \exists P \in \mathrm{GL}_m : \quad B = PA.$$

Ora, lo spazio vettoriale $\mathrm{M}_{m\times p}$ e' un GL_m-modulo, proprio rispetto all'azione data dalla moltiplicazione (a sinistra) di matrici, e il sottinsieme $\mathrm{M}^\circ_{m\times p}$ e' mutato in se' da questa azione. Possiamo allora dire che $R(B) = R(A)$ se e solo se B ed A stanno nella stessa orbita rispetto a questa azione. Dunque si ha una biiezione

$$\mathrm{M}^\circ_{m\times p}/\mathrm{GL}_m \simeq \mathrm{L}_m(V_p).$$

Ora, tutte le bracket $[j_1, \ldots, j_m]$ sono invarianti relativi di $\mathrm{M}_{m\times p}$ rispetto a GL_m, aventi tutte lo stesso peso $\mathrm{GL}_m \to \mathbb{K}^\times$ dato da $g \to \det(g)$; il complesso delle bracket definisce una funzione

$$\mathrm{M}_{m\times p} \to V_{\binom{p}{m}} - \underline{0}$$

cui corrisponde una iniezione

$$\mathrm{M}^\circ_{m\times p}/\mathrm{GL}_m \to L_1\left(V_{\binom{p}{m}}\right).$$

L'immagine di questa iniezione e' l'insieme delle soluzioni del sistema delle equazioni quadratiche

$$x_{i_1,\ldots,i_m} x_{j_1,\ldots,j_m} = \sum_{h=1}^{m} x_{i_1,\ldots,j_1,\ldots,i_m} x_{i_h,j_2,\ldots,j_m}.$$

Questo fatto si esprime dicendo che l'insieme dei sottospazi proiettivi di dimensione $m-1$ in uno spazio proiettivo di dimensione $p-1$ e' la varieta' dello spazio proiettivo di dimensione $\binom{p}{m} - 1$ data dalle soluzioni del sistema delle equazioni di sopra. Queste varieta' si chiamano Grassmanniane e le equazioni dei sistemi si chiamano relazioni Pluckeriane.

Chapter 4

Azioni di SL e $\mathfrak{sl}$

4.1 Lezione VI

4.1.1 Azioni di SL e $\mathfrak{sl}$

Theorem 4. *Sia $\mathbb{K}$ un campo di caratteristica 0 e siano:*
- G *il gruppo* $\mathrm{SL}_m(\mathbb{K})$;
- $\mathfrak{g}$ *l'algebra di Lie corrispondente, cioe'* $\mathfrak{sl}_m(\mathbb{K})$;
- V *lo spazio vettoriale* $\mathbb{K}^m$ *con l'azione solita di* G *e* $\mathfrak{g}$;
- W *uno spazio vettoriale costruito a partire da* V *mediante le operazioni di passaggio al duale, somma diretta, potenza tensoriale, potenza simmetrica, potenza esterna, con l'azione naturale di* G *e* $\mathfrak{g}$ *indotta dalle azioni su* V, *e siano*

$$R : \mathrm{G} \to \mathrm{GL}(W), \quad \rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(W),$$

le corrispondenti rappresentazioni.

Allora la sottoalgebra di $\mathrm{End}(W)$ *generata da* $R(\mathrm{G})$ *(cioe' la chiusura lineare di* $R(\mathrm{G})$*) coincide con la sottoalgebra di* $\mathrm{End}(W)$ *generata da* $\rho(\mathfrak{g})$ *(cioe' la chiusura moltiplicativa di* $\rho(\mathfrak{g})$*):*

$$\langle R(\mathrm{G})\rangle = \langle \rho(\mathfrak{g})\rangle.$$

Di seguito diamo un'idea della dimostrazione, imitandoci alle costruzioni di primo livello, e fra queste considerando solo le potenze tensoriali (l'asserto nel caso di duali e somme dirette si tratta facilmente, e nel caso delle potenze simmetriche e potenze esterne si deduce dal caso dei prodotti tensoriali). Sia dunque

$$W = \otimes^p V = V \otimes \cdots \otimes V \quad (p \ volte).$$

Di regola, indichiamo gli elementi del gruppo G con lettere maiuscole e gli elementi della corrispondente algebra di Lie $\mathfrak{g}$ con lettere minuscole.

Ciascun elemento A del gruppo G agisce su $\otimes^p V$ diagonalmente, cioe' e' rappresentato dall'operatore $R(A)$ che sui tensori decomponibili e' definito da

$$R(A)\,(v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_p) = Av_1 \otimes Av_2 \otimes \cdots \otimes Av_p;$$

piu' sinteticamente, si ha

$$R(A) = A \otimes A \otimes \cdots \otimes A.$$

Ciascun elemento a dell'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ agisce su $\otimes^p V$ per derivazione, cioe' e' rappresentato dall'operatore $\rho(a)$ che sui tensori decomponibili e' definito da

$$\rho(a)\,(v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_p) = av_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_p + v_1 \otimes av_2 \otimes \cdots \otimes v_p + \cdots \\ + v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes av_p;$$

piu' sinteticamente, si ha

$$\rho(a) = a \otimes \mathrm{I} \otimes \cdots \otimes \mathrm{I} + \mathrm{I} \otimes a \otimes \cdots \otimes \mathrm{I} + \cdots + \mathrm{I} \otimes \mathrm{I} \otimes \cdots \otimes a.$$

Useremo i seguenti fatti sul gruppo e sull'algebra di Lie:
- Il gruppo $\mathrm{SL}_m(\mathbb{K})$ e' generato dalle trasvezioni, cioe' dalle matrici del tipo

$$E_{ij}(\lambda) = \mathrm{I} + \lambda e_{ij}$$

ottenute al variare di i, j interi distinti compresi fra 1 e m e di λ in $\mathbb{K}$, dove I e' la matrice unita' ed e_{ij} e' la matrice che ha 1 al posto (i, j) e 0 altrove. Questo fatto segue quasi direttamente dall'algoritmo di Gauss-Jordan.
- L'algebra di Lie $\mathfrak{sl}_m(\mathbb{K})$ e' generata dalle matrici del tipo e_{ij} ottenute al variare di i, j interi distinti compresi fra 1 e m.

Siano ora i, j due interi distinti fissati compresi fra 1 ed m. Si noti che

$$E_{ij}(\lambda)E_{ij}(\mu) = E_{ij}(\lambda + \mu),$$

dunque l'insieme degli elementi $E_{ij}(\lambda)$ ottenuti al variare di $\lambda \in \mathbb{K}$ e' un sottogruppo di G, isomorfo al gruppo additivo di $\mathbb{K}$.

Per semplicita', scriviamo $E(\lambda)$ al posto di $E_{ij}(\lambda)$, scriviamo e al posto di e_{ij}; dunque abbiamo $E(\lambda) = \mathrm{I} + e$, con $e^2 = 0$. Proveremo che la chiusura lineare del gruppo costituito dagli elementi $R(E(\lambda))$ ottenuti al variare di $\lambda \in \mathbb{K}$ coincide con la chiusura lineare dell'insieme delle prime p potenze divise dell'elemento $\rho(e)$, in simboli:

$$\langle R(E(\lambda));\ \lambda \in \mathbb{K}\rangle = \langle \mathrm{I}, \rho(e), \frac{\rho(e)^2}{2!}, \ldots, \frac{\rho(e)^p}{p!}\rangle.$$

Di seguito indichiamo con $[p]$ l'insieme $\{1, \ldots, p\}$ e per ogni insieme S indichiamo con $|S|$ la sua cardinalita'.

Da una parte, si ha

$$\begin{aligned} R(\mathrm{I} + \lambda e) &= (\mathrm{I} + \lambda e) \otimes (\mathrm{I} + \lambda e) \otimes \cdots \otimes (\mathrm{I} + \lambda e) \\ &= \sum_{h=0}^{p} \lambda^h \left[\sum_{S \subseteq [p]:\ |S|=h} T_S \right], \end{aligned}$$

dove per ogni sottinsieme S il termine T_S e' l'operatore prodotto tensoriale di p operatori su V : l'operatore e in ciascuna falda corrispondente ad un elemento di S e l'operatore I nelle altre falde.

Dall'atra parte, per ogni $h = 0, 1, 2, \ldots$ si ha

$$\begin{aligned} \rho(e)^h &= (e \otimes \mathrm{I} \otimes \cdots \otimes \mathrm{I} + \mathrm{I} \otimes e \otimes \cdots \otimes \mathrm{I} + \cdots + \mathrm{I} \otimes \mathrm{I} \otimes \cdots \otimes e)^h \\ &= h! \sum_{S \subseteq [p]:\ |S|=h} T_S \end{aligned}$$

dove per ogni sottinsieme S il termine T_S e' l'operatore prodotto tensoriale di p operatori su V : l'operatore e in ciascuna falda corrispondente ad un elemento di S e l'operatore I nelle altre falde. In particolare $\rho(e)^h = 0$ per $h > p$.

Dunque per ogni $\lambda \in \mathbb{K}$ si ha

$$R(E(\lambda)) = \sum_{h=0}^{p} \lambda^h \frac{\rho(e)^h}{h!} = \sum_{h=0}^{+\infty} \lambda^h \frac{\rho(e)^h}{h!} = e^{\lambda\rho(e)},$$

dove l'ultimo termine e' l'esponenziale formale dell'operatore nilpotente $\rho(e)$ (con un incidente di notazione fra base ed esponente che non dovrebbe creare problemi). Cio' implica l'inclusione

$$\langle R(E(\lambda));\ \lambda \in \mathbb{K}\rangle \subseteq \langle \mathrm{I}, \rho(e), \frac{\rho(e)^2}{2!}, \ldots, \frac{\rho(e)^p}{p!}\rangle.$$

Per provare l'inclusione inversa si considerano le uguaglianze di sopra per $p+1$ scalari distinti $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_p$:

$$R(E(\lambda_i)) = \sum_{h=0}^{p} \lambda_i^h \frac{\rho(e)^h}{h!}, \qquad i = 0, 1, \ldots, p.$$

Si hanno cosi' espressioni lineari dei $p+1$ operatori $R(E(\lambda_h))$ in funzione dei $p+1$ operatori $\frac{\rho(e)^h}{h!}$, con matrice dei coefficienti la matrice di Vandermonde

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda_0 & \lambda_0^2 & \ldots & \lambda_0^p \\ 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \ldots & \lambda_1^p \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_p & \lambda_p^2 & \ldots & \lambda_p^p \end{pmatrix},$$

che e' nonsingolare in quanto i λ_i sono a due a due distinti. Dunque si hanno pure espressioni lineari dei $p+1$ operatori $\frac{\rho(e)^h}{h!}$ in funzione dei $p+1$ operatori $R(E(\lambda_h))$.

Remark 1. *Sia t un tensore in $\otimes^p V$; per quanto visto sopra, per ogni i, j interi distinti fra 1 ed m ed ogni $\lambda \in \mathbb{K}$ si ha*

$$R(E_{ij}(\lambda))(t) = t + \lambda\rho(e_{ij})(t) + \lambda^2\ \frac{\rho(e_{ij})^2}{2!}(t) + \cdots$$

Osserviamo che, se $\rho(e_{ij})(t) = 0$, allora per ogni $\lambda \in \mathbb{K}$ si ha $R(E_{ij}(\lambda))(t) = t$; essendo $\mathbb{K}$ un campo infinito, vale pure il viceversa. Di piu', essendo l'insieme degli $E_{ij}(\lambda)$ un sistema di generatori del gruppo $\mathrm{G} = \mathrm{SL}_m(\mathbb{K})$ ed essendo l'insieme degli e_{ij} un sistema di generatori dell'agebra di Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_m(\mathbb{K})$, si ha

$$R(A)(t) = t \quad \forall A \in \mathrm{G} \quad \textit{sse} \quad \rho(a)(t) = 0 \quad \forall a \in \mathfrak{g}.$$

Esercizio. Sia $\mathbb{K}$ un campo di caratteristica 0 e sia $V = \mathbb{K}^m$. Si consideri una matrice $m \times m$ nilpotente a, e il suo esponenziale $A = \sum_{h=0}^{+\infty} \frac{a^h}{h!} = e^a$. Siano $\rho(a) = \sum_{q=1}^{p} \mathrm{I} \otimes \cdots \otimes a \otimes \mathrm{I} \otimes \cdots \otimes \mathrm{I}$ l'operatore indotto per derivazione dalla matrice a sul prodotto tensoriale $\otimes^p V$, e $R(A) = A \otimes A \otimes \cdots \otimes A$ l'operatore indotto diagonalmente dalla matrice A sul prodotto tensoriale $\otimes^p V$. E' vero che $\rho(a)$ e' nilpotente, e che il suo esponenziale e' $R(A)$?

4.1.2 Elementi invarianti per SL ed elementi annullati da e $\mathfrak{sl}$

Consideriamo un gruppo G, un G−spazio vettoriale W, e una funzione polinomiale $F \in \mathbb{K}[W]$. Abbiamo definito F un G−invariante se

$$F(A \cdot w) = w, \quad \forall A \in \mathrm{G}, w \in W;$$

cio' equivale a

$$F(A^{-1} \cdot w) = w, \quad \forall A \in \mathrm{G}, w \in W,$$

che a sua volta equivale a

$$A \cdot F = F \quad \forall A \in \mathrm{G}.$$

In altri termini, si ha che una funzione polinomiale su W e' invariante rispetto all'azione di G su W se e solo se tale funzione come elemento del spazio vettoriale $\mathbb{K}[W]$ e' fissato dall'azione di G su $\mathbb{K}[W]$. Dalle considerazioni del punto precedente si puo' dedurre la seguente

Proposition 1. *Consideriamo: il gruppo* $\mathrm{G} = \mathrm{SL}_m(\mathbb{K})$ *e la sua algebra di Lie* $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_m(\mathbb{K})$ *con le loro azioni usuali su* $V = \mathbb{K}^m$, *uno spazio* W *ottenuto da* V *mediante le operazioni dell'algebra multilineare con le azioni naturali di* G *e* $\mathfrak{g}$, *e una funzione polinomiale* $F \in \mathbb{K}[W]$. *Sono equivalenti le seguenti affermazioni:*
1- F e' fissato dall'azione del gruppo G *su* $\mathbb{K}[W]$:

$$A \cdot F = F, \quad \forall A \in \mathrm{G};$$

2- F e' fissato dall'azione delle trasvezioni:

$$E_{ij}(\lambda) \cdot F = F, \quad \forall i, j \text{ con } i \neq j, \ \forall \lambda \in \mathbb{K};$$

3- F e' annullato dall'azione dell'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ *su* $\mathbb{K}[W]$:

$$a \cdot F = 0, \quad \forall a \in \mathfrak{g}.$$

4- F e' annullato dall'azione delle matrici elementari non diagonali:

$$e_{ij} \cdot F = 0, \quad \forall i, j \text{ con } i \neq j.$$

Chapter 5

Covarianti di tensori simmetrici

5.1 Lezione VII

5.1.1 Da $\mathbb{K}[\oplus V_m]$ come $\mathfrak{sl}_m-$modulo sinistro a $\mathbb{K}[L|P_m]$ come $\mathfrak{sl}_m-$modulo destro.

Consideriamo un'algebra di Lie g, uno spazio vettoriale V e il suo spazio vettoriale duale V^*. A ciascuna azione sinistra $\mathfrak{g}\times V \to V$ corrisponde un'azione destra $V^* \times \mathfrak{g} \to V^*$, data da

$$(\varphi \cdot a)(v) = \varphi(a \cdot v), \quad \forall a \in \mathfrak{g}, \varphi \in V^*, v \in V.$$

Consideriamo ora l'azione sinistra naturale di $\mathfrak{sl}(V)$ su V, e la corrispondente azione destra di $\mathfrak{sl}(V)$ su V^*. Sia $e_1, \ldots, e_m$ una base di V e sia $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m$ la base duale di V^*, dove ε_i e' la funzione coordinata $i-$ma:

$$\varepsilon_i(e_j) = \delta_{ij}, \quad \forall i, j = 1, \ldots, m.$$

Sia ora $a \in \mathfrak{sl}(V)$; se l'azione sinistra di a sui vettori della base degli e di V e' data da

$$a \cdot e_\alpha = \sum_1^m a_{\beta\alpha} e_\beta, \qquad \forall \alpha = 1, \ldots, m,$$

allora l'azione destra di a sui vettori della base degli ε di V^* e' data da

$$\varepsilon_\alpha \cdot a = \sum_1^m a_{\alpha\beta} \varepsilon_\beta, \qquad \forall \alpha = 1, \ldots, m;$$

in altri termini: la matrice che rappresenta l'azione destra di a su V^* rispetto alla base degli ε e' la trasposta della matrice che rappresenta l'azione sinistra di a su V rispetto alla base degli e. In particolare, per ciascun operatore e_{ij} (i, j interi distinti fra 1 ed m) con

$$e_{ij} \cdot e_\alpha = \delta_{j\alpha} e_i, \qquad \forall \alpha = 1, \ldots, m,$$

(rappresentato dalla matrice elementare avente 1 nella posizione (i, j) e 0 altrove) si ha

$$\varepsilon_\alpha \cdot e_{ij} = \delta_{\alpha i} \varepsilon_j, \qquad \forall \alpha = 1, \ldots, m.$$

Consideriamo lo spazio vettoriale $W = \oplus_1^{+\infty} V$, i cui elementi sono successioni $(v_1, v_2, \ldots)$ di vettori $v_i \in V$, con l'azione sinistra naturale di $\mathfrak{sl}_m(V)$ data da

$$a \cdot (v_1, v_2, \ldots) = (a \cdot v_1, a \cdot v_2, \ldots),$$

e lo spazio vettoriale duale $W^* \simeq \oplus_1^{+\infty} V^*$, i cui elementi sono successioni $(\varphi_1, \varphi_2, \ldots)$ di funzionali $\varphi_i \in V^*$, con l'azione destra naturale di $\mathfrak{sl}_m(V)$ data da

$$(\varphi_1, \varphi_2, \ldots) \cdot a = (\varphi_1 \cdot a, \varphi_2 \cdot a, \ldots).$$

Per brevita', indichiamo con $(h|\alpha)$ la funzione coordinata $\alpha-$ma sulla copia $h-$ma di V, poniamo cioe'

$$(h|\alpha) = (0, \ldots, 0, \varepsilon_\alpha, 0, \ldots), \qquad (\varepsilon_\alpha \text{ all'h-mo posto});$$

l'azione delle matrici elementari su questi elementi e' data da

$$(h|\alpha) \cdot e_{ij} = \delta_{\alpha i}(h|j).$$

Consideriamo l'algebra

$$\mathbb{K}[W] \simeq \mathrm{Sym}[W^*]$$

delle funzioni polinomiali di un'infinita' numerabile di copie dello spazio vettoriale V, con l'azione destra naturale di $\mathfrak{sl}_m(V)$ ottenuta estendendo per derivazione l'azione destra di $\mathfrak{sl}_m(V)$ su W^*. Quest'algebra e' generata dai funzionali algebricamente indipendenti $(h|\alpha)$ (dove h varia fra gli interi positivi ed α fra gli interi da 1 ad m): l'azione destra si $\mathfrak{sl}_m(V)$ e' completamente individuata dall'azione delle matrici elementari sui generatori:

$$(h|\alpha) \cdot e_{ij} = \delta_{\alpha i}(h|j).$$

Abbiamo cosi' un isomorfismo di $\mathfrak{sl}_m-$moduli destri

$$\mathbb{K}[W] \simeq \mathrm{Sym}[W^*] \simeq \mathbb{K}[L|P_m],$$

con l'algebra letterplace $\mathbb{K}[L|P_m]$, dove $L = \mathbb{Z}^+$ e' l'insieme degli interi postitivi, e P_m e' l'insieme $\{1, 2, \ldots, m\}$. L'azione destra di $\mathfrak{sl}_m$ su $\mathbb{K}[L|P_m]$ e' data rappresentando le matrici elementari come polarizzazioni destre

$$(h|\alpha) \cdot e_{ij} = (h|\alpha)\ {}_{ij}\mathrm{D} = \delta_{\alpha i}(h|j), \qquad \forall \ldots$$

Esempio. A ciascuna bracket $[h_1, \ldots, h_m]$ in $\mathbb{K}[\oplus_1^{+\infty} V]$ corrisponde un biprodotto $(h_1 \cdots h_m|1 \cdots m)$ in $\mathbb{K}[L|P_m]$; al fatto che le bracket sono fissate dall'azione del gruppo SL_m corrisponde il fatto che i biprodotti sono annullati dall'azione dell'algebra di Lie $\mathfrak{sl}_m$, cioe' dalle polarizzazioni destre. Infatti per ogni $i, j \in P_m$ con $i \neq j$ si ha

$$(h_1 \cdots h_m|1 \cdots m)\ {}_{ij}\mathrm{D} = (h_1 \cdots h_m|1 \cdots j \cdots j \cdots m) = 0.$$

5.1.2 $\mathbb{K}[\mathrm{Sym}_n[V_m]]$ come $\mathfrak{sl}_m-$modulo destro.

Siano come sopra $V_m = V$ e V^* uno spazio vettoriale di dimensione m e il suo duale, e $e_1, \ldots, e_m$ ed $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m$ una base di V e la base di V^* data dalle funzioni coordinate. Concretamente (e un poco informalmente), l'algebra simmetrica $\mathrm{Sym}[V]$ di V e' l'algebra commutativa generata dai vettori di V, soggetti alle relazioni di (bi)linearita'

$$u(\lambda v + \mu w) = \lambda uv + \mu uw, \qquad (u, v, w \in V,\ \lambda, \mu \in \mathbb{K});$$

gli elementi di quest'algebra si dicono "tensori simmetrici". I prodotti $v_1 \cdots v_n$ di un dato numero n di vettori $v_i \in V$ generano un sottospazio $\mathrm{Sym}_n[V]$, i cui elementi si dicono "tensori simmetrici omogenei di grado n".

Alla base di V data dagli $e_1, \ldots, e_m$ corrisponde la base di $\mathrm{Sym}[V_m]$ data dai monomi $e_1^{h_1} \cdots e_m^{h_m}$ ($h_1, \ldots, h_m$ interi non negativi); per ogni intero non negativo n, i monomi di questo tipo aventi grado n (cioe' tali che $h_1 + \cdots + h_m = n$) formano una base di $\mathrm{Sym}_n[V]$. Scriviamo il generico tensore omogeneo di grado n su V nella forma

$$t = \sum_{h_1 + \cdots + h_m = n} \frac{n!}{h_1! \cdots h_m!} t_{h_1 \ldots h_m} e_1^{h_1} \cdots e_m^{h_m}$$

ed indichiamo con $\varepsilon_{h_1 \dots h_m}$ i funzionali dati da

$$\varepsilon_{h_1 \dots h_m}(t) = t_{h_1 \dots h_m}, \qquad \forall \dots$$

(in altri termini, in $\mathrm{Sym}_n[V]$ consideriamo la base dei monomi normalizzati $\frac{n!}{h_1! \cdots h_m!} e_1^{h_1} \cdots e_m^{h_m}$ ed indichiamo con $\varepsilon_{h_1 \dots h_m}$ la base di $\mathrm{Sym}_n[V]^*$ data dalle corrispondenti funzioni coordinate). L'azione sinistra di $\mathfrak{sl}_m$ su V induce per derivazione un'azione sinistra su $\mathrm{Sym}_n[V]$ che a sua volta induce un'azione destra su $\mathrm{Sym}_n[V]^*$, che risulta essere data da

$$\varepsilon_{\alpha_1 \dots \alpha_m} \cdot e_{ij} = \alpha_i \varepsilon_{\alpha_1 \dots \alpha_{i-1} \dots \alpha_{j+1} \dots \alpha_m}, \qquad \forall \dots$$

Consideriamo infine l'algebra

$$\mathbb{K}[\mathrm{Sym}_n[V]] \simeq \mathrm{Sym}[\mathrm{Sym}_n[V]^*]$$

delle funzioni polinomiali di un tensore omogeneo di grado n su V; su quest'algebra c'e' un'azione destra naturale di $\mathfrak{sl}_m(V)$, ottenuta estendendo per derivazione l'azione destra di $\mathfrak{sl}_m(V)$ su $\mathrm{Sym}_n[V]^*$. Quest'algebra e' generata dai funzionali algebricamente indipendenti $\varepsilon_{\alpha_1 \dots \alpha_m}$ (dove $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ varia fra le sequenze di m interi non negativi tali che $\alpha_1 + \cdots \alpha_m = n$): l'azione destra si $\mathfrak{sl}_m(V)$ e' completamente individuata dall'azione delle matrici elementari sui generatori:

$$\varepsilon_{\alpha_1 \dots \alpha_m} \cdot e_{ij} = \alpha_i \varepsilon_{\alpha_1 \dots \alpha_{i-1} \dots \alpha_{j+1} \dots \alpha_m}, \qquad \forall \dots$$

Esempio. Consideriamo uno spazio vettoriale V di dimensione 2, con una base e_1, e_2, e la potenza simmetrica $\mathrm{Sym}_n[V]$; la scrittura di un tensore omogeneo di grado n su V rispetto alla base monomiale normalizzata di $\mathrm{Sym}_n[V]$ corrispondente alla base di V e'

$$t = \sum_{i+j=n} \frac{n!}{i!j!} t_{ij} e_1^i e_2^j$$

ed i corrispondenti funzionali coordinati ε_{ij} sono dati da

$$\varepsilon_{ij}(t) = t_{ij}, \qquad \forall \dots$$

Il discriminante di un tensore simmetrico quadratico

$$t = t_{20} e_1^2 + 2 t_{11} e_1 e_2 + t_{02} e_2^2;$$

e'

$$\Delta(t) = t_{11}^2 - t_{20}t_{02}, \qquad \forall t$$

cosi'

$$\Delta = \varepsilon_{11}^2 - \varepsilon_{20}\varepsilon_{02}.$$

Al fatto che Δ e' fissato dall'azione di SL_2, corrisponde il fatto che Δ e' annullato dall'azione di $\mathfrak{sl}_2$; e cio' equivale al fatto che

$$\Delta \cdot e_{12} = 0, \quad \Delta \cdot e_{21} = 0.$$

Verifichiamo la prima affermazione

$$\begin{aligned}
\Delta \cdot e_{12} &= \left(\varepsilon_{11}^2 - \varepsilon_{20}\varepsilon_{02}\right) \cdot e_{12} \\
&= \left(\varepsilon_{11}^2\right) \cdot e_{12} - \left(\varepsilon_{20}\varepsilon_{02}\right) \cdot e_{12} \\
&= 2\varepsilon_{11}\left(\varepsilon_{11} \cdot e_{12}\right) - \left(\varepsilon_{20} \cdot e_{12}\right)\varepsilon_{02} - \varepsilon_{20}\left(\varepsilon_{02} \cdot e_{12}\right) \\
&= 2\varepsilon_{11}\varepsilon_{02} - 2\varepsilon_{11}\varepsilon_{02} - \varepsilon_{20}0 = 0
\end{aligned}$$

5.1.3 L'operatore umbrale $U_n : \mathbb{K}[L|P_m] \to \mathbb{K}[\mathrm{Sym}_n[V_m]]$.

L'algebra degli invarianti di una o piu' quantiche, equivalentemente di uno o piu' tensori simmetrici omogenei, si puo' costruire a partire dall'algebra degli invarianti di piu' (per semplicita', infiniti) vettori, mediante il metodo simbolico; questo metodo era il "cavallo di battaglia" degli invariantisti del IXX secolo, qui lo presentiamo nella forma rigorosa data da G.-C. Rota e collaboratori, in una prima forma per le forme binarie in [KR], e piu' in generale per piu' tensori sia simmetrici che antisimmetrici in

[GRS] F. Grosshans, G.-C. Rota, J. Stein, Invariant Theory and Superalgebras, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1987.

trattazione che prendiamo ora fino ad avviso contrario come riferimento principale. Per una discussione approfondita rimandiamo all'articolo di Grosshans [G].

Definition 1. *Siano* $\mathbb{K}[L|P_m]$ *e* $\mathbb{K}[\mathrm{Sym}_n[V_m]]$ *le algebre definite nei punti precedenti,* $e_1, \ldots, e_m$ *una base di* V_m *ed* $\varepsilon_{h_1 \ldots h_m}$ *(con* $h_1 + \cdots + h_m = n$*) le corrispondenti funzioni coordinate su* $\mathrm{Sym}_n[V_m]$. *Definiamo un operatore lineare*

$$U = U_n : \mathbb{K}[L|P_m] \to \mathbb{K}[\mathrm{Sym}_n[V_m]], \quad Q \mapsto \langle U|Q\rangle,$$

assegnando il suo valore sulla base dei monomi nelle variabili letterplace ponendo

$$\langle U|(a|1)^{k_1}\cdots(a|m)^{k_m}\rangle = \begin{cases} \varepsilon_{k_1\ldots k_m} & se\ k_1+\cdots+k_m = n \\ 0 & se\ k_1+\cdots+k_m \neq n \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &\langle U|(a|1)^{h_1}\cdots(a|m)^{h_m}(b|1)^{k_1}\cdots(b|m)^{k_m}\cdots(c|1)^{l_1}\cdots(c|m)^{l_m}\rangle = \\ &\quad = \langle U|(a|1)^{h_1}\cdots(a|m)^{h_m}\rangle\langle U|(b|1)^{k_1}\cdots(b|m)^{k_m}\rangle\cdots\langle U|(c|1)^{l_1}\cdots(c|m)^{l_m}\rangle \end{aligned}$$

per $a, b, \ldots, c$ lettere a due a due distinte. L'operatore U si dice "operatore umbrale".

Si ha che:
- ogni monomio nelle funzioni coordinate $\varepsilon_{*\cdots*}$ e' immagine tramite l'operatore umbrale di un monomio letterplace (infatti ciascuna occorrenza di una funzione coordinata nel monomio e' immagine di un monomio letterplace, anzi di infiniti monomi letterplace, tanti quante sono le lettere in L, e basta allora prendere questi monomi letterplace con lettere a due a due distinte, e considerare il loro prodotto);
- l'operatore umbrale e' equivariante rispetto all'azione destra delle matrici elementari e_{ij} per ogni i, j interi distinti fra 1 ed m (cio' segue dal fatto che $\langle U|Q \cdot e_{ij}\rangle = \langle U|Q\rangle \cdot e_{ij}$ per ogni monomio letterplace Q).

Da cio' segue la

Proposition 2. *L'operatore umbrale $U : \mathbb{K}[L|P_m] \to \mathbb{K}[\mathrm{Sym}_n[V_m]]$ e' un epimorfismo di $\mathfrak{sl}_m-$moduli destri.*

5.1.4 Completa riducibilita'

Ricordiamo il

Theorem 5 (Completa riducibilita', Weyl)**.** *Sia $\mathbb{K}$ un campo di caratteristica 0, e $\mathfrak{g}$ un'algebra di Lie semisemplice. Ogni $\mathfrak{g}-$modulo di dimensione finita e' semisemplice.*

In particolare, indicato con $\widehat{\mathfrak{g}}$ l'insieme dei tipi d'isomorfismo dei $\mathfrak{g}-$moduli irriducibili, ogni $\mathfrak{g}-$modulo W si puo' scrivere in uno ed un solo modo come

$$W = \oplus_{\lambda\in\widehat{\mathfrak{g}}} W_\lambda,$$

dove W_λ e' la componente isotipica di W di tipo λ, cioe' la somma di tutti i sottomoduli di W irriducibili di tipo λ; a sua volta ogni componente isotipica W_λ si puo' scrivere (in generale in piu' modi) come somma diretta di sottomoduli irriducibili di tipo λ.

Evidenziamo il fatto che ogni morfismo $f : W \to Z$ di $\mathfrak{g}-$moduli si scompone lungo le componenti isotipiche, nel senso che

$$f(W_\lambda) \subseteq Z_\lambda, \qquad \forall \lambda \in \widehat{\mathfrak{g}}$$

(cio' segue per il I lemma di Schur). In particolare, f e' un epimorfismo se e solo se $f(W_\lambda) = Z_\lambda$, per ogni $\lambda \in \widehat{\mathfrak{g}}$.

5.1.5 I teorema fondamentale

Dato uno spazio vettoriale V di dimensione m su K, con l'azione sinistra usuale di $\mathfrak{sl}_m$, consideriamo gli $\mathfrak{sl}_m-$moduli destri di dimensione finita costruiti a partire da V mediante le operazioni dell'algebra multilineare. Per ciascun modulo W indichiamo con $W^{\mathfrak{sl}_m}$ il sottomodulo di W costituito dagli elementi annullati dall'azione di $\mathfrak{sl}_m$. Dalle considerazioni del punto precedente segue che per ogni epimorfismo $F : W \to Z$ di $\mathfrak{sl}_m-$moduli si ha

$$F\left(W^{\mathfrak{sl}_m}\right) = Z^{\mathfrak{sl}_m}.$$

Da queste considerazioni segue subito il

Theorem 6. *Con le stesse notazioni di sopra, si ha:*

$$U\left(\mathbb{K}[L|P_m]^{\mathfrak{sl}_m}\right) = \mathbb{K}[\mathrm{Sym}_n[V_m]]^{\mathfrak{sl}_m};$$

equivalentemente:

$$U\left(\mathbb{K}[L|P_m]^{\mathrm{SL}_m}\right) = \mathbb{K}[\mathrm{Sym}_n[V_m]]^{\mathrm{SL}_m}.$$

.. che a sua volta, per il I Teorema fondamentale degli invarianti vettoriali, porge il

Theorem 7 (I Teorema Fondamentale)**.** *Con le stesse notazioni di sopra, si ha: l'algebra degli invarianti $\mathbb{K}[\mathrm{Sym}_n[V_m]]^{\mathrm{SL}_m}$ e' generata linearmente dalle immagini umbrali $\langle U|Q\rangle$ dei prodotti*

$$Q = [h_1, \ldots, h_m] \cdots [k_1, \ldots, k_m]$$

di bracket in $\mathbb{K}[L|P_m]$.

Esempio Consideriamo i tensori quadratici binari

$$t = \varepsilon_{20}(t)e_1^2 + 2\varepsilon_{11}(t)e_1e_2 + \varepsilon_{02}(t)e_2^2.$$

Il discriminante $\Delta = \varepsilon_{11}^2 - \varepsilon_{20}\varepsilon_{02}$ e' l'immagine umbrale di $[a,b]^2$ (a,b lettere distinte). Infatti

$$\begin{aligned}[a,b]^2 = (ab|12)^2 &= ((a|1)(b|2) - (a|2)(b|1))^2 \\ &= (a|1)^2(b|2)^2 - 2(a|1)(a|2)(b|1)(b|2) + (a|2)^2(b|1)^2 \\ &\mapsto\ \varepsilon_{20}\varepsilon_{02} - 2\varepsilon_{11}^2 + \varepsilon_{02}\varepsilon_{20} = -2\Delta\end{aligned}$$

Esempio Consideriamo i tensori cubici binari

$$t = \varepsilon_{30}(t)e_1^3 + 3\varepsilon_{21}(t)e_1^2e_2 + 3\varepsilon_{12}(t)e_1e_2^2 + \varepsilon_{03}(t)e_2^3.$$

La potenza $[a,b]^3$ ha immagine umbrale l'invariante nullo, in quanto: da una parte, per l'irrilevanza delle lettere, si ha

$$\langle U|[a,b]^3\rangle = \langle U|[b,a]^3\rangle;$$

dall'altra, per l'antisimmetria della bracket, si ha

$$\langle U|[b,a]^3\rangle = \langle U|(-[a,b])^3\rangle = -\langle U|[a,b]^3\rangle.$$

Un invariante non banale e' l'immagine umbrale del monomio

$$[a,b]^2[a,c][b,d][c,d]^2,$$

(a,b,c,d lettere distinte); si preferisce rappresentare questo monomio come un tableau

$$\begin{bmatrix} a & b \\ a & b \\ a & c \\ b & d \\ c & d \\ c & d \end{bmatrix}.$$

5.2 VIII Lezione

5.2.1 Operatore umbrale, versione per gli invarianti dei tensori simmetrici binari.

Consideriamo gli invarianti dei tensori simmetrici di un certo ordine n in dimensione 2; il metodo simbolico puo' essere riassunto come segue.

Sia V_2 uno spazio vettoriale di dimensione 2, con base e_1, e_2, con un'azione sinistra di $\mathfrak{sl}_2$ data da

$$\mathrm{E}_{ij} \cdot e_\alpha = \delta_{j\alpha} e_i, \quad (\text{dove } (i,j) = (1,2) \text{ o } (2,1) \text{ e } \alpha = 1,2).$$

Consideriamo
- lo spazio vettoriale $\mathrm{Sym}_n[V_2]$ potenza simmetrica $n-$ma di V_2, con la base

$$\frac{n!}{\alpha_1!\alpha_2!} e_1^{\alpha_1} e_2^{\alpha_2}, \quad (\text{con } \alpha_1 + \alpha_2 = n),$$

e con l'azione sinistra di $\mathfrak{sl}_2$ indotta per derivazione dall'azione sinistra di $\mathfrak{sl}_2$ su V_2; lo spazio vettoriale duale $\mathrm{Sym}_n[V_2]^*$ con la base $\varepsilon_{\alpha_1,\alpha_2}$ (con $\alpha_1+\alpha_2 = n$) duale della base di $\mathrm{Sym}_n[V_2]$, e con l'azione destra di $\mathfrak{sl}_2$ indotta dall'azione sinistra di $\mathfrak{sl}_2$ su $\mathrm{Sym}_n[V_2]$, esplicitamente data da

$$\varepsilon_{\alpha_1,\alpha_2} \cdot \mathrm{E}_{12} = \alpha_1 \varepsilon_{\alpha_1-1,\alpha_2+1}, \quad \text{e} \quad \varepsilon_{\alpha_1,\alpha_2} \cdot \mathrm{E}_{21} = \alpha_2 \varepsilon_{\alpha_1+1,\alpha_2-1};$$

- l'algebra

$$\mathbb{K}[\mathrm{Sym}_n[V_2]] \simeq \mathrm{Sym}[\mathrm{Sym}_n[V_2]^*],$$

con la base dei monomi nelle $\varepsilon_{\alpha_1,\alpha_2}$ e con l'azione destra di $\mathfrak{sl}_2$ indotta per derivazione dall'azione destra di $\mathfrak{sl}_2$ su $\mathrm{Sym}_n[V_2]^*$.

In questa notazione, il generico tensore simmetrico di ordine n su V_2 si scrive

$$t = \sum_{h_1+h_2=n} \frac{n!}{h_1!h_2!} \varepsilon_{h_1 h_2}(t)\ e_1^{h_1} e_2^{h_2}.$$

L'operatore umbrale associato e' l'operatore lineare

$$U_n :\ \mathbb{K}[L|P_2] \to \mathbb{K}[\mathrm{Sym}_n[V_2]], \quad * \mapsto \langle U_n | * \rangle$$

dove:

- $\mathbb{K}[L|P_2]$ e' l'algebra dei polinomi nelle variabili letterplace $(a|\alpha)$ (con a variabile in un alfabeto infinito L e α variabile nell'insieme $P_2 = \{1,2\}$) e con l'azione destra di $\mathfrak{sl}_2$ indotta per derivazione dall'azione destra di $\mathfrak{sl}_2$ sulle variabili letterplace data da

$$(a|\alpha) \cdot \mathrm{E}_{ij} = \delta_{\alpha i}(a|j),$$

cioe' l'azione nella quale gli elementi E_{ij} sono rappresentati dalle rispettive polarizzazioni destre;
- U_n e' definito sulla base dei monomi nelle variabili letterplace dalle condizioni

$$\langle U_n|(a|1)^{h_1}(a|2)^{h_2}\rangle = \begin{cases} \varepsilon_{h_1h_2} & \text{se } h_1 + h_2 = n \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\langle U_n|(a|1)^{h_1}(a|2)^{h_2}(b|1)^{k_1}(b|2)^{k_2}\cdots\rangle = \\ \langle U_n|(a|1)^{h_1}(a|2)^{h_2}\rangle\langle U_n|(b|1)^{k_1}(b|2)^{k_2}\rangle\cdots,$$

per $a, b, \ldots$ lettere a due a due distinte in L.

Il fatto cruciale provato nella lezione precedente e' che U_n e' un epimorfismo equivariante di $\mathfrak{sl}_2-$moduli destri; cio' permette (per la semisemplicita' di $\mathfrak{sl}_2$) di trasportare per il I teorema fondamentale dagli invarianti di vettori agli invarianti di tensori simmetrici:

> l'algebra degli invarianti dei tensori di ordine n su V_2 rispetto al gruppo SL_2 (funzioni polinomiali dei coefficienti dei tensori fissate dal gruppo), equivalentemente degli invarianti dei tensori di ordine n su V_2 rispetto all'algebra di Lie $\mathfrak{sl}_2$ (funzioni polinomiali dei coefficienti dei tensori annullate dall'algebra di Lie), e' generata linearmente dalle immagini umbrali dei monomi nelle bracket:
>
> $$\mathbb{K}[\mathrm{Sym}_n[V_2]]^{\mathrm{SL}_2} = \mathbb{K}[\mathrm{Sym}_n[V_2]]^{\mathfrak{sl}_2} = \\ \langle\langle U_n|[ab][cd]\ldots[gh]\rangle;\ a, b, \ldots, h \in L\rangle.$$

5.2.2 Operatore umbrale, versione per gli invarianti delle forme binarie.

Il metodo simbolico per gli invarianti delle forme binarie e' sostanzialmente identico al metodo simbolico per gli invarianti dei tensori simmetrici; in vista dell'estensione dagli invarianti ai covarianti lo riformuliamo come segue.

Sia V_2 uno spazio vettoriale di dimensione 2, con base e_1, e_2, con un'azione destra di $\mathfrak{sl}_2$ data da

$$e_\alpha \cdot \mathrm{E}_{ij} = \delta_{\alpha i} e_j, \quad ((i,j) = (1,2) \text{ o } (2,1) \text{ e } \alpha = 1,2);$$

e sia V_2^* lo spazio vettoriale duale , con base duale $\varepsilon_1, \varepsilon_2$, con l'azione sinistra di $\mathfrak{sl}_2$ data da

$$\mathrm{E}_{ij} \cdot \varepsilon_\alpha = \delta_{j\alpha} \varepsilon_i, \quad ((i,j) = (1,2) \text{ o } (2,1) \text{ e } \alpha = 1,2).$$

Consideriamo
- lo spazio vettoriale $\mathbb{K}_n[V_2]$ delle forme di grado n su V_2, con la base

$$\frac{n!}{\alpha_1! \alpha_2!} \varepsilon_1^{\alpha_1} \varepsilon_2^{\alpha_2}, \quad (\text{con } \alpha_1 + \alpha_2 = n),$$

e con l'azione sinistra di $\mathfrak{sl}_2$ indotta per derivazione dall'azione sinistra di $\mathfrak{sl}_2$ su V_2^*; lo spazio vettoriale duale $\mathbb{K}_n[V_2]^*$ con la base e_{α_1,α_2} (con $\alpha_1 + \alpha_2 = n$) duale della base di $\mathbb{K}_n[V_2]$, e con l'azione destra di $\mathfrak{sl}_2$ indotta dall'azione sinistra di $\mathfrak{sl}_2$ su $\mathbb{K}_n[V_2]$, esplicitamente data da

$$e_{\alpha_1,\alpha_2} \cdot \mathrm{E}_{12} = \alpha_1 e_{\alpha_1 - 1, \alpha_2 + 1}, \quad \text{e} \quad e_{\alpha_1,\alpha_2} \cdot \mathrm{E}_{21} = \alpha_2 e_{\alpha_1 + 1, \alpha_2 - 1};$$

- l'algebra

$$\mathbb{K}[\mathbb{K}_n[V_2]] \simeq \mathrm{Sym}[\mathbb{K}_n[V_2]^*],$$

con la base dei monomi nelle e_{α_1,α_2} e con l'azione destra di $\mathfrak{sl}_2$ indotta per derivazione dall'azione destra di $\mathfrak{sl}_2$ su $\mathbb{K}_n[V_2]^*$.

In questa notazione, la generica forma di ordine n su V_2 si scrive

$$f = \sum_{h_1 + h_2 = n} \frac{n!}{h_1! h_2!} e_{h_1 h_2}(f) \; \varepsilon_1^{h_1} \varepsilon_2^{h_2}.$$

L'operatore umbrale associato e' l'operatore lineare

$$U_n : \; \mathbb{K}[L|P_2] \to \mathbb{K}[\mathbb{K}_n[V_2]], \quad * \mapsto \langle U_n | * \rangle$$

dove:
- $\mathbb{K}[L|P_2]$ e' l'algebra dei polinomi nelle variabili letterplace $(a|\alpha)$ (con a variabile in un alfabeto infinito L e α variabile nell'insieme $P_2 = \{1,2\}$) e

con l'azione destra di $\mathfrak{sl}_2$ indotta per derivazione dall'azione destra di $\mathfrak{sl}_2$ sulle variabili letterplace data da

$$(a|\alpha) \cdot \mathrm{E}_{ij} = \delta_{\alpha i}(a|j),$$

cioe' l'azione nella quale gli elementi E_{ij} sono rappresentati dalle rispettive polarizzazioni destre;
- U_n e' definito sulla base dei monomi nelle variabili letterplace dalle condizioni

$$\langle U_n|(a|1)^{h_1}(a|2)^{h_2}\rangle = \begin{cases} e_{h_1 h_2} & \text{se } h_1 + h_2 = n \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\langle U_n|(a|1)^{h_1}(a|2)^{h_2}(b|1)^{k_1}(b|2)^{k_2}\cdots\rangle = \langle U_n|(a|1)^{h_1}(a|2)^{h_2}\rangle\langle U_n|(b|1)^{k_1}(b|2)^{k_2}\rangle\cdots,$$

per $a, b, \ldots$ lettere a due a due distinte in L.

Le proprieta' dell'operatore umbrale per un tensore simmetrico in dimensione 2 si riflettono nelle proprieta' dell'operatore umbrale per una forma binaria:

> U_n e' un epimorfismo equivariante di $\mathfrak{sl}_2$−moduli destri; da cio' segue che l'algebra degli invarianti delle forme di ordine n su V_2 rispetto al gruppo SL_2, o equivalentemente rispetto all'algebra di Lie $\mathfrak{sl}_2$, e' generata linearmente dalle immagini umbrali dei monomi nelle bracket:
>
> $$\mathbb{K}[\mathbb{K}_n[V_2]]^{\mathrm{SL}_2} = \mathbb{K}[\mathbb{K}_n[V_2]]^{\mathfrak{sl}_2} = \langle\langle U_n|[ab][cd]\ldots[gh]\rangle;\ a, b, \ldots, h \in L\rangle.$$

5.2.3 Operatore umbrale per i covarianti delle forme binarie.

L'operatore umbrale per i covarianti di una forma di grado n su V_2

$$f = \sum_{h_1+h_2=n} \frac{n!}{h_1!h_2!} e_{h_1 h_2}(f)\ \varepsilon_1^{h_1}\varepsilon_2^{h_2}$$

e di un vettore di V_2

$$v = \varepsilon_1(v)\ e_1 + \varepsilon_2(v)\ e_2.$$

e' l'operatore lineare

$$U_n : \ \mathbb{K}[L \smile x|P_2] \to \mathbb{K}[\mathbb{K}_n[V_2] \oplus V_2], \quad * \mapsto \langle U_n|*\rangle$$

dove:
- $\mathbb{K}[L \smile x|P_2]$ e' l'algebra dei polinomi nelle variabili letterplace $(a|\alpha)$ (con a variabile in un alfabeto infinito L piu' un simbolo x, e α variabile nell'insieme $P_2 = \{1,2\}$) e con l'azione destra di $\mathfrak{sl}_2$ indotta per derivazione dall'azione destra di $\mathfrak{sl}_2$ sulle variabili letterplace data da

$$(a|\alpha) \cdot \mathrm{E}_{ij} = \delta_{\alpha i}(a|j),$$

cioe' l'azione nella quale gli elementi E_{ij} sono rappresentati dalle rispettive polarizzazioni destre;
- U_n e' definito sulla base dei monomi nelle variabili letterplace dalle condizioni

$$\langle U_n|(a|1)^{h_1}(a|2)^{h_2}\rangle = \begin{cases} e_{h_1h_2} & \text{se } h_1 + h_2 = n \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\langle U_n|(x|1)^h(x|2)^k\rangle = (-\varepsilon_2)^h\varepsilon_1^k$$

$$\langle U_n|(a|1)^{h_1}(a|2)^{h_2}(b|1)^{k_1}(b|2)^{k_2}\cdots\rangle = \langle U_n|(a|1)^{h_1}(a|2)^{h_2}\rangle\langle U_n|(b|1)^{k_1}(b|2)^{k_2}\rangle\cdots,$$

per $a, b, \ldots$ lettere a due a due distinte in $L \smile x$.

Si ha che

> U_n e' un epimorfismo equivariante di $\mathfrak{sl}_2-$moduli destri; da cio' segue che l'algebra dei covarianti di una forma di ordine n su V_2 rispetto al gruppo SL_2 (funzioni polinomiali dei coefficienti di una forma e delle coordinate di un vettore fissate dal gruppo), equivalentemente rispetto all'algebra di Lie $\mathfrak{sl}_2$, e' generata linearmente dalle immagini umbrali dei monomi nelle bracket:
>
> $$\mathbb{K}[\mathbb{K}_n[V_2] \oplus V_2]^{\mathrm{SL}_2} = \mathbb{K}[\mathbb{K}_n[V_2] \oplus V_2]^{\mathfrak{sl}_2} = \langle\langle U_n|[ab][cd]\ldots[gh]\rangle; \ a, b, \ldots, h \in L \smile x\rangle.$$

(Il fatto che U_n : $\mathbb{K}[L \smile x|P_2] \to \mathbb{K}[\mathbb{K}_n[V_2] \oplus V_2]$ sia un morfismo di $\mathfrak{sl}_2-$moduli destri segue essenzialmente dal fatto che la restrizione $\mathbb{K}[L|P_2] \to \mathbb{K}[\mathbb{K}_n[V_2]]$ e' un morfismo di $\mathfrak{sl}_2-$moduli destri e che U_n si comporta bene sulle variabili $(x|*)$, cioe'

$$\langle U_n|(x|\alpha) \cdot \mathrm{E}_{ij}\rangle = \langle U_n|(x|\alpha)\rangle \cdot \mathrm{E}_{ij}, \qquad \forall \dots$$

Ad esempio si ha

$$\langle U_n|(x|1) \cdot \mathrm{E}_{12}\rangle = \langle U_n|(x|2)\rangle = \varepsilon_1$$
$$\langle U_n|(x|1)\rangle \cdot \mathrm{E}_{12} = (-\varepsilon_2) \cdot \mathrm{E}_{12} = (-\mathrm{E}_{12}) \cdot (-\varepsilon_2) = \varepsilon_1.$$

)

Esempio: la forma covariante di se' stessa. La $n-$ica binaria covariante di se' stessa, cioe' l'elemento $F \in \mathbb{K}[\mathbb{K}_n[V_2] \oplus V_2]$ dato da

$$F(f, v) = f(v), \qquad \forall f \in \mathbb{K}_n[V_2],\ v \in V_2,$$

in altri termini, in coordinate

$$F = \sum_{h_1+h_2=n} \frac{n!}{h_1!h_2!}\ e_{h_1h_2}\ \varepsilon_1^{h_1}\varepsilon_2^{h_2},$$

e' l'immagine tramite l'operatore umbrale U_n dell'elemento di $\mathbb{K}[L \smile x|L_2]$ dato dalla potenza $n-$ma di una bracket $[ax]$, dove a e' un qualsiasi elemento in L,

$$F = \langle U_n|[ax]^n\rangle.$$

Infatti si ha

$$[ax]^n = (ax|12)^n = ((a|1)(x|2) - (a|2)(x|1))^n =$$
$$= \sum_{i+j=n} (-)^j \frac{n!}{i!j!}(a|1)^i(x|2)^i(a|2)^j(x|1)^j \ \mapsto$$
$$\mapsto\ \textit{tramite } U_n\ \mapsto\ \sum_{i+j=n} \frac{n!}{i!j!} e_{ij}\varepsilon_1^i\varepsilon_2^j$$

Gli invariantisti del IXX secolo usavano lo stesso simbolo per indicare una $n-$ica binaria e la rapprentazione umbrale della $n-$ica binaria covariante di se' stessa; in questo senso consideravano ogni forma cose se fosse una potenza di una forma lineare; scrivevano ciascuna bracket $[ax]$ nella forma a_x; l'inizio tipico di un discorso era "sia data una $n-$ica binaria

$$f = a_x^n = b_x^n = c_x^n = \dots$$

5.2.4 Prime applicazioni

Sia M un monomio nelle variabili letterplace, e sia $a \in L \smile x$; diciamo contenuto di M in a, ed indichiamo con $\mathrm{cont}(M, a)$, il numero complessivo delle occorrenze in M delle variabili $(a|i)$ con $i = 1, 2$. Diciamo che un elemento $P \in \mathbb{K}[L \smile x|P_2]$ e' omogeneo in un simbolo $a \in L \smile x$ se nella scrittura di P rispetto ad una base di $\mathbb{K}[L \smile x|P_2]$ formata da monomi letterplce tutti i monomi che compaiono effettivamente hanno lo stesso contenuto in a, e in tal caso poniamo $\mathrm{cont}(P, a) = \mathrm{cont}(M_i, a)$, dove M_i e' uno di tali monomi. Se P e' omogeneo in ciascun simbolo di $L \smile x$, si ha che

$$\langle U_n|P\rangle \neq 0 \quad \text{solo se} \quad \mathrm{cont}(P, a) = 0 \text{ oppure } n, \ \forall a \in L;$$

in tal caso, indicato con g il numero dei simboli distinti di L che compaiono in P e indicato con i il contenuto di P nel simbolo x, si ha che $\langle U_n|P\rangle$ e' un elemento in $\mathbb{K}[\mathbb{K}_n[V_2] \oplus V_2]$ omogeneo di grado complessivo g nei coefficienti e_{**} della forma e di grado complessivo i nei coefficienti ε_* del vettore.

Ogni monomio nelle bracket

$$M = [\ t_{11} \quad t_{12}\ ]\, [\ t_{21} \quad t_{22}\ ] \cdots [\ t_{q1} \quad t_{q2}\ ]$$

e' omogeneo rispetto ad ogni simbolo $a \in L \smile x$, e $\mathrm{cont}(M, a)$ e' il numero di occorrenze di a nella sequenza $t_{11}, t_{12}, t_{21}, t_{22}, \ldots$ (Cio' deriva dal fatto che ogni bracket $[uv]$ (u, v distinti) e' omogenea con

$$\mathrm{cont}([uv], a) = \begin{cases} 1 & \text{se a= u, v,} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

e

$$\mathrm{cont}(\prod_i [t_{i1}t_{i2}], a) = \sum_i \mathrm{cont}([t_{i1}t_{i2}], a).$$

)
Dal I teorema fondamentale per i covarianti delle forme binarie e da queste osservazioni segue direttamente la

Proposition 3. *Esistono covarianti non nulli di una $n-$ica binaria aventi grado g ed indice i solo se $ng + i$ e' pari; in tal caso, posto $ng + i = 2q$, lo spazio di tali covarianti e' generato dalle immagini umbrali dei prodotti $\prod_1^q [t_{i1}t_{i2}]$ di q bracket che contengono g elementi distinti di L ciascuno con molteplicita' n, e il simbolo x con molteplicita' i.*

In particolare, indicato con $C_{n;g}$ lo spazio dei covarianti di una $n-$ica binaria aventi grado g, si ha

- $C_{n;1}$ e' monodimensionale, generato dalla forma covariante di se' stessa $F = \langle U_n | [ax]^n \rangle$. (Consideriamo un prodotto M di bracket che contiene un solo elemento a di L con molteplicita' n, e l'elemento x con una qualche molteplicita'; osserviamo che se in qualche bracket ci sono due occorrenze di a oppure di x, allora la bracket e' nulla, e con essa M; se ciascuna bracket contiene una occorrenza di a ed una di x, allora a meno di un segno tale bracket e' $[ax]$, ed $M = [ax]^n$.)

- $C_{n;2}$ e' generato dalle immagini umbrali

$$\langle U_n | [ab]^p [ax]^{n-p} [bx]^{n-p} \rangle, \quad p = 0, 2, 4 \ldots$$

In particolare per $p = 0$ si ha il quadrato F^2 della forma covariante di se' stessa e per $p = 2$ si ha il covariante Hessiano. (Consideriamo un prodotto M di bracket che contiene due elementi a, b di L ciascuno con molteplicita' n, e l'elemento x con una qualche molteplicita'; osserviamo che se in qualche bracket ci sono due occorrenze di uno stesso simbolo, allora la bracket e' nulla, e con essa M; se ciascuna bracket contiene due simboli distinti presi fra a, b, x, indicato con p il numero (eventualmente nullo) delle bracket che contengono a, b, si ha a meno di un segno che

$$M = [ab]^p [ax]^{n-p} [bx]^{n-p};$$

se p e' dispari, si ha

$$\begin{aligned} - \langle U_n | [ab]^p [ax]^{n-p} [bx]^{n-p} \rangle &= \langle U_n | (-[ab])^p [ax]^{n-p} [bx]^{n-p} \rangle = \\ &= \langle U_n | [ba]^p [bx]^{n-p} [ax]^{n-p} \rangle = \langle U_n | [ab]^p [ax]^{n-p} [bx]^{n-p} \rangle \end{aligned}$$

e dunque $\langle U_n | [ab]^p [ax]^{n-p} [bx]^{n-p} \rangle = 0$. Infine, per ogni $p = 0, 2, 4, \ldots$ si ha che $\langle U_n | [ab]^p [ax]^{n-p} [bx]^{n-p} \rangle$ e' l'unico eventuale covariante di grado p ed indice $2(n-p)$; essendo l'Hessiano $H(f, v) = D_{11}^2 f(v) D_{22}^2 f(v) - (D_{12}^2 f(v))^2$ un covariante di grado 2 ed indice $2(n-2)$, si ha

$$\langle U_n | [ab]^2 [ax]^{n-2} [bx]^{n-2} \rangle = H.$$

)

Chapter 6

Invarianti vettoriali, super

6.1 Lezione IX

6.1.1 Richiami: superalgebre letterplace

Il riferimento principale di questa lezione e' [GRS], sez. 4. Invariant theory, sottosez. 2. The action of $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ on Super$[L|P]$, che pero' seguiamo un po' alla lontana nel senso che adottiamo il punto di vista algebre di Lie invece che gruppale e per semplicita' consideriamo un campo $\mathbb{K}$ di caratteristica zero. Siano

$$L = L_{\overline{0}} \dot{\smile} L_{\overline{1}}, \quad P = P_{\overline{0}} \dot{\smile} P_{\overline{1}}$$

due insiemi $\mathbb{Z}_2-$graduati, costituiti da elementi detti rispettivamente "letters" e "places", e sia

$$[L|P] = [L|P]_{\overline{0}} \dot{\smile} [L|P]_{\overline{1}}$$

il prodotto cartesiano di L e P, con la struttura naturale di insieme $\mathbb{Z}_2-$graduato; gli elementi di $[L|P]$ vengono indicati con $(a|b)$ e vengono detti "variabili letterplace"; lo $\mathbb{Z}_2-$grado di $(a|b)$ e' $\overline{0}$ oppure $\overline{1}$ secondo che gli $\mathbb{Z}_2-$gradi di a e b sono uguali o diversi, in simboli:

$$|(a|b)| = |a| + |b|;$$

spesso per brevita' scriveremo $|ab|$ al posto di $|(a|b)|$. Un poco informalmente, la superalgebra letterplace Super$[L|P]$ su $\mathbb{K}$ e' la $\mathbb{K}-$algebra associativa con unita' generata dalle variabili letterplace, soggette alle relazioni di supercommutazione

$$(a|b)(c|d) = (-)^{|ab||cd|}(c|d)(a|b), \qquad \forall \ldots$$

L'algebra Super$[L|P]$ e' un bimodulo rispetto all'azione sinistra della superagebra di Lie $\mathfrak{pl}[L]$ e all'azione destra della superagebra di Lie $\mathfrak{pl}[P]$ nelle quali le matrici elementari vengono rappresentate rispettivamente dalle superpolarizzazioni sinistre e destre.

Supponiamo che L e P siano al piu' numerabili, e fissiamo su ciascuno di essi un ordinamento dello stesso tipo d'ordine dei numeri naturali; in corrispondenza a un tale ordinamento si ha una base lineare della superalgebra Super$[L|P]$ costituita da monomi letterplace; i monomi letterplace di ciascun fissato $\mathbb{Z}-$grado n generano lineramente un sottospazio Super$_n[L|P]$, e la superalgebra Super$[L|P]$ ha la $\mathbb{Z}-$graduazione

$$\mathrm{Super}[L|P] = \oplus_{n=0}^{+\infty}\mathrm{Super}_n[L|P].$$

Ciascun sottospazio

$$\mathrm{Super}_n[L|P]$$

e' stabile rispetto alle azioni di $\mathfrak{pl}(L)$ e $\mathfrak{pl}(P)$.

6.1.2 Richiami: biprodotti e bitableaux

Per ogni coppia (u, v) costituita da una parola $u = u_1 \cdots u_n$ su L e una parola $v = v_1 \cdots v_n$ su P aventi la stessa lunghezza n, si definisce un elemento

$$(u|v) = (u_1 \cdots u_n|v_1 \cdots v_n)$$

in Super$_n[L|P]$ detto biprodotto di u e v. Ciascun biprodotto e' supersimmetrico nei suoi due argomenti, e i biprodotti si comportano bene rispetto all'azione delle superpolarizzazioni. Questi fatti si possono descrivere dicendo che l'applicazione

$$\mathrm{Mon}_n[L] \times \mathrm{Mon}_n[P] \to \mathrm{Super}_n[L|P], \quad (u, v) \mapsto (u|v)$$

induce un'applicazione lineare

$$\mathrm{Super}_n[L] \otimes \mathrm{Super}_n[P] \to \mathrm{Super}_n[L|P]$$

equivariante rispetto alle azioni di $\mathfrak{pl}(L)$ e $\mathfrak{pl}(P)$.

Per ogni coppia (S, T) costituita da un tableau $S = (u^{(1)}, \cdots, u^{(p)})$ su L e un tableau $T = (v^{(1)}, \cdots, v^{(p)})$ su P aventi la stessa forma $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_p)$

partizione di n, si definisce un elemento

$$(S|T) = \left(\begin{array}{c|c} u^{(1)} & v^{(1)} \\ \vdots & \vdots \\ u^{(p)} & v^{(p)} \end{array} \right)$$

in $\mathrm{Super}_n[L|P]$ detto bitableau di S e T. Ciascun bitableau e' supersimmetrico in ciascuna riga dei suoi due argomenti, e i bitableaux si comportano bene rispetto all'azione delle superpolarizzazioni. Questi fatti si possono descrivere dicendo che l'applicazione

$$(\times_1^p \mathrm{Mon}_{\lambda_i}[L]) \times (\times_1^p \mathrm{Mon}_{\lambda_i}[P]) \to \mathrm{Super}_n[L|P], \quad (S,T) \mapsto (S|T)$$

induce un'applicazione lineare

$$\left(\otimes_1^p \mathrm{Super}_{\lambda_i}[L]\right) \otimes \left(\otimes_1^p \mathrm{Super}_{\lambda_i}[P]\right) \to \mathrm{Super}_n[L|P]$$

equivariante rispetto alle azioni di $\mathfrak{pl}(L)$ e $\mathfrak{pl}(P)$.

Il teorema della base standard (valido sugli interi) afferma in particolare che

> i bitableaux $(S|T)$ al variare di (S,T) fra le coppie ordinate di tableaux standard della stessa forma, ed al variare di tali forme fra le partizioni di n (che soddisfano dunque le hook conditions associate ad L e P), formano una base di $\mathrm{Super}_n[L|P]$.

6.1.3 Quali algebre e quali azioni ci interessano

Ci interessa il caso in cui

$$L = L_{\bar{0}} \dot{\smile} L_{\bar{1}}, \quad P = P_{\bar{1}} = \{1, 2, \ldots, m\},$$

con $L_{\bar{i}}$ entrambi infiniti. Dunque $\mathrm{Super}[L|P]$ e' la $\mathbb{K}-$algebra con unita' generata dalle variabili letterplace, soggette alle relazioni di supercommutazione

$$(a|a')(b|b') = \begin{cases} (b|b')(a|a') & \text{se } |a| = 1 \text{ oppure } |b| = 1 \\ -(b|b')(a|a') & \text{se } |a| = |b| = 0 \end{cases}$$

e $\mathfrak{pl}[P]$ coincide con l'algebra di Lie $\mathfrak{gl}(m)$, che ha un'azione destra naturale sull'algebra $\mathrm{Super}[L|P]$, nella quale a ciascuna matrice elementare E_{ab}

corrisponde una polarizzazione destra D_{ab} che e' una derivazione nel senso stretto del termine.
Siamo interessati alla superalgebra $\mathrm{Super}[L|P]$ come $\mathfrak{sl}_m-$modulo destro, e alla sua sottoalgebra

$$\mathrm{Super}[L|P]^{\mathfrak{sl}_m}$$

degli $\mathfrak{sl}_m-$invarianti, costituita cioe' degli elementi di $\mathrm{Super}[L|P]$ annullati dall'azione di $\mathfrak{sl}_m$.

6.1.4 I Teorema fondamentale

Ciascun biprodotto parametrizzato su P dalla parola $12\cdots m$ e' annullato dall'azione di $\mathfrak{sl}_m$, infatti per ogni $1 \leq i, j \leq m$ con $i \neq j$ si ha

$$(u_1 u_2 \cdots u_m | 12 \cdots m) \cdot D_{ij} = (u_1 u_2 \cdots u_m | \cdots j \cdots j \cdots) = 0.$$

Ciascuno di questi biprodotti dice "superbracket" e viene rappresentato indicando solo la parola su L, con parentesi quadre; in simboli si pone

$$(u_1 u_2 \cdots u_m | 12 \cdots m) = [u_1 u_2 \cdots u_m].$$

Theorem 8. *La sottoalgebra* $\mathrm{Super}[L|P]^{\mathfrak{sl}_m}$ *degli elementi* $\mathfrak{sl}_m-$*invarianti dell'algebra* $\mathrm{Super}[L|P]$ *coincide con:*

-la sottoalgebra di $\mathrm{Super}[L|P]$ *generata dalle superbracket;*

-il sottospazio di $\mathrm{Super}[L|P]$ *generato dai bitableau rettangolari di forma* $(m, m, \ldots, m)$*;*

-il sottospazio di $\mathrm{Super}[L|P]$ *che ha per base i bitableau standard rettangolari di forma* $(m, m, \ldots, m)$*.*

(Si ammette fra i bitableaux rettangolari anche il caso limite del bitableau di forma vuota, che si assume uguale all'unita' del campo).

Nel caso $L = L_{\bar{1}}$ si ha

$$\mathrm{Super}[L|P] = \mathbb{K}[L|P] \cong \mathbb{K}[\oplus_1^{+\infty} V_m],$$

l'algebra

$$\mathbb{K}[L|P]^{\mathfrak{sl}_m} \cong \mathbb{K}[\oplus_1^{+\infty} V_m]^{\mathfrak{sl}_m}$$

e' l'algebra degli invarianti rispetto ad $\mathfrak{sl}_m$ di una sequenza infinita di vettori in dimensione m, e le superbracket sono a meno di un segno le bracket classiche. Dunque il teorema di sopra generalizza il I teorema fondamentale degli invarianti vettoriali.

Dimostrazione. Basta provare che per ogni $n > 0$, ogni $J \in \mathrm{Super}_n[L|P]^{\mathfrak{sl}_m}$ con $J \neq 0$ si puo' esprimere come combinazione lineare di bitableaux standard rettangolari di forma $(m, m, \ldots)$.
Per il teorema della base standard, ed essendo $J \neq 0$, possiamo scrivere

$$J = \sum_{(S,T) \in \mathcal{V}} c_{ST}(S|T),$$

dove $\mathcal{V}$ e' un insieme di coppie ordinate di tableaux standard, tali che in ciascuna coppia i due tableaux hanno la stessa forma, tutte le corrispondenti forme sono partizioni di n, e $c_{ST} \neq 0$ per ogni $(S, T) \in \mathcal{V}$.
Per ogni $0 \leq i, j \leq m$ si ha

$$\begin{aligned} 0 &= J \cdot (D_{ii} - D_{jj}) \\ &= \sum_{(S,T) \in \mathcal{V}} c_{ST}(S|T) \cdot (D_{ii} - D_{jj}) \\ &= \sum_{(S,T) \in \mathcal{V}} c_{ST}(c(T, i) - c(T, j))(S|T), \end{aligned}$$

dove $c(T, *)$ e' il contenuto del tableau T nel simbolo $*$. Ora, per ogni $(S, T) \in \mathcal{V}$ si ha

$$\begin{aligned} c_{ST}(c(T, i) - c(T, j)) &= 0, \\ c(T, i) - c(T, j) &= 0 \ in \ \mathbb{K}, \qquad \text{(essendo } c_{ST} \neq 0\text{)}, \\ c(T, i) - c(T, j) &= 0 \ in \ \mathbb{Z}_+, \qquad \text{(essendo } char(\mathbb{K}) = 0\text{)} \end{aligned}$$

Dunque, per ogni $(S, T) \in \mathcal{V}$ si ha che

$$c(T, 1) = c(T, 2) = \cdots = c(T, m);$$

essendo T tableau di forma partizione di n si ha pure

$$c(T, 1) = c(T, 2) = \cdots = c(T, m) = \frac{m}{n} := g;$$

abbiamo introdotto il simbolo g per brevita', il fatto importante e' che g non dipende da T. In particolare, il sottotableau del tableau standard T costituito dagli elementi 1 e 2 e' del tipo

$$\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ \vdots & \vdots \\ \vdots & 2 \\ \vdots & \\ 1 & \\ 2 & \\ \vdots & \\ 2 & \end{array}$$

dove ci sono g occorrenze di 1 e di 2; indichiamo con $h(T)$ il numero di occorrenze di 1 nella prima colonna.

Affermiamo che

$$h(T) = 0, \qquad \forall (S,T) \in \mathcal{V}.$$

Lo proviamo per assurdo; supponiamo dunque che

$$\overline{h} = \max_{(S,T)\in\mathcal{V}} h(T) > 0.$$

Si ha

$$\begin{aligned} 0 &= J \cdot D_{12}^{\overline{h}} \\ &= \sum_{(S,T)\in\mathcal{V}} c_{ST}(S|T) \cdot D_{12}^{\overline{h}}; \end{aligned}$$

osserviamo che

1. per ogni $(S,T) \in \mathcal{V}$ tale che $h(T) < \overline{h}$ si ha

$$(S|T) \cdot D_{12}^{\overline{h}} = 0.$$

   Infatti

$$(S|T) \cdot D_{12}^{\overline{h}} = \sum_i z_i (S|T_i),$$

dove gli z_i sono interi e per ciascun i il sottotableau del tableau T_i costituito dagli elementi 1 e 2 e' del tipo

$$\begin{array}{cc}
1 & * \\
\vdots & \vdots \\
\vdots & * \\
\vdots & \\
1 & \\
1 & \\
\vdots & \\
1 &
\end{array}$$

dove nella seconda colonna ci sono $\overline{h} - h(T) > 0$ simboli 1; dunque c'e' almeno una riga che inizia con 11 e, essendo il simbolo 1 di $\mathbb{Z}_2-$grado 1, per antisimmetria si ha $(S|T_i) = 0$.

2. per ogni $(S,T) \in \mathcal{V}$ tale che $h(T) = \overline{h}$ si ha

$$(S|T) \cdot D_{12}^{\overline{h}} = \overline{h}!(S|T'),$$

dove $T' = T$ tranne che il sottotableau di T' costituito dagli elementi 1 e 2 e'

$$\begin{array}{cc}
1 & 2 \\
\vdots & \vdots \\
\vdots & 2 \\
\vdots & \\
1 & \\
1 & \\
\vdots & \\
1 &
\end{array}$$

con $g - \overline{h} \geq 0$ simboli 2 nella seconda colonna. Osserviamo che: (1) per ogni T del tipo considerato, si ha che T' e' standard; (2) per ogni T_1, T_2 del tipo considerato, da $T_1 \neq T_2$ segue $T_1' \neq T_2'$.

Riassumendo, posto

$$\overline{\mathcal{V}} = \{(S,T) \in \mathcal{V} : \ h(T) = \overline{h}\},$$

si ha

$$\begin{aligned} 0 &= J \cdot D_{12}^{\overline{h}} \\ &= \sum_{(S,T)\in\mathcal{V}} c_{ST}(S|T) \cdot D_{12}^{\overline{h}}; \\ &= \sum_{(S,T)\in\overline{\mathcal{V}}} c_{ST}\overline{h}!\ (S|T'). \end{aligned}$$

Cio' e' assurdo in quanto: (1) la somma non e' vuota, (2) la famiglia dei bitableaux $(S|T')$ che compaiono nella sommatoria e' costituita da bitableaux standard a due a due distinti, (3) i coefficienti $c_{ST}\overline{h}!$ per ipotesi e per il fatto che $char(\mathbb{K}) = 0$ sono tutti non nulli.

Dunque

$$J = \sum_{(S,T)\in\mathcal{V}} c_{ST}(S|T),$$

dove per ogni $(S,T) \in \mathcal{V}$ il sottotableau del tableau standard T costituito dagli elementi $1, 2, 3$ e' del tipo

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & 3 \\ \vdots & \vdots & \\ 1 & 2 & \\ 3 & & \\ \vdots & & \\ 3 & & \end{array}$$

dove ci sono g occorrenze di 1,2,3. Si ripete l'argomento precedente, fino ad ottenere che per ogni $(S,T) \in \mathcal{V}$ il tableau standard T e' del tipo

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & \ldots & m \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \ldots & m \end{array}.$$

Dalla dimostrazione segue in particolare che

$$\mathrm{Super}_n[L|P]^{\mathfrak{sl}_m} = \{0\} \quad \text{a meno che } m \text{ divida } n;$$

in tale caso, se $\overline{L}$ e' un sottinsieme finito di L, si ha

$$\dim \mathrm{Super}_n[\overline{L}|P]^{\mathfrak{sl}_m} = \#\{S \text{ tableau standard su } \overline{L} \text{ di forma } (m, \ldots, m)\}.$$

Chapter 7

Covarianti di tensori antisimmetrici

7.1 Lezione X

In questa lezione ricordiamo brevemente le definizioni e le prime proposizioni fondamentali sull'algebra esterna, o algebra di Grassmann, e sull'algebra di Cayley-Grassmann, come algebra per il calcolo geometrico invariante. Per una presentazione sintetica dellla storia e del panorama ampio nel quale questo argomento si inserisce rimandiamo a

[S] I. Stewart, Hermann Grassmann was right, Nature, Volume 321, Issue 6065, pp. 17 (1986) (http://www.readcube.com/articles/10.1038)

e a [G].

7.1.1 Algebra esterna

Sia V uno spazio vettoriale su un campo $\mathbb{K}$. Un poco informalmente, si puo' dire che algebra esterna $\Lambda[V]$ di V e' l'algebra associativa con unita' su $\mathbb{K}$ generata dall'insieme dei vettori $v \in V$ soggetta alle condizioni di compatibilita' con la struttura di V ed alle relazioni

$$v^2 = 0, \qquad \forall v \in V;$$

che implicano le, e nel caso $char(\mathbb{K}) \neq 2$ equivalgono alle, relazioni

$$vw = -wv, \qquad \forall v, w \in V.$$

Gli elementi di $\Lambda[V]$ si dicono "tensori antisimmetrici"; gli elementi di $\Lambda[V]$ che si possono scrivere come prodotto di (due o piu') vettori, cioe' i tensori antisimmetrici completamente decomponibili, si dicono "estensori".

Esempio. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 3, e sia $\{e_1, e_2, e_3\}$ una base di V; per ogni due vettori

$$a = a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3, \quad b = b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3,$$

in V, nell'algebra esterna $\Lambda[V]$ si ha

$$\begin{aligned} ab =&a_1b_1e_1^2 + a_1b_2e_1e_2 + a_1b_3e_1e_3 + \\ &a_2b_1e_2e_1 + a_2b_2e_2^2 + a_2b_3e_2e_3 + \\ &a_3b_1e_3e_1 + a_3b_2e_3e_2 + a_3b_3e_3^2 = \\ &= (a_1b_2 - a_2b_1)e_1e_2 + (a_1b_3 - a_3b_1)e_1e_3 + (a_2b_3 - a_3b_2)e_2e_3. \end{aligned}$$

In generale, si ha

Proposition 4. *Sia V uno spazio vettoriale di dimensione m; se $\{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$ e' una base di V, allora gli estensori*

$$e_{j_1}e_{j_2}\cdots e_{j_p} \qquad (1 \leq j_1 < j_2 < \ldots < j_p \leq m;\ 0 \leq p \leq m)$$

formano una base di $\Lambda[V]$; in particolare,

$$\dim\Lambda[V] = 2^m.$$

Per ciascun intero p fissato, gli estensori $e_{j_1}e_{j_2}\cdots e_{j_p}$ di sopra generano un sottospazio $\Lambda^p[V]$, i cui elementi si dicono "tensori antisimmetrici di step p", e si ha

$$\dim\Lambda^p[V] = \binom{m}{p};$$

questi sottospazi forniscono una $\mathbb{Z}-$graduazione di $\Lambda[V]$, nel senso che

$$\Lambda[V] = \bigoplus_{p\in\mathbb{Z}} \Lambda^p[V], \qquad \Lambda^p[V]\Lambda^q[V] \subseteq \Lambda^{p+q}[V], \quad \forall p, q \in \mathbb{Z}$$

(si intende che $\Lambda^p[V] = \{0\}$ per gli interi p non compresi fra 0 ed m).

Sotto le ipotesi e notazioni della proposizione, si prova che per ogni sequenza di q vettori di V

$$a_i = a_{i1}e_1 + a_{i1}e_2 + \cdots + a_{im}e_m, \quad i = 1, \ldots, q$$

si ha

$$a_1 a_2 \ldots a_q = \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_q \leq m} a_{j_1 j_2 \ldots j_q} e_{j_1} e_{j_2} \cdots e_{j_q},$$

dove

$$a_{j_1 j_2 \ldots j_q} = \det \begin{pmatrix} a_{1j_1} & a_{1j_2} & \ldots & a_{1j_q} \\ a_{2j_1} & a_{2j_2} & \ldots & a_{2j_q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{qj_1} & a_{qj_2} & \ldots & a_{qj_q} \end{pmatrix};$$

si intende che per $q > m$ si ha

$$a_1 a_2 \ldots a_q = 0.$$

Gli scalari $a_{j_1 j_2 \ldots j_q}$ si dicono "coordinate Pluckeriane" dell'estensore $a_1 a_2 \cdots a_q$. Indicata con A la matrice $q \times m$ che ha nelle righe le coordinate dei vari vettori $a_1, \ldots, a_q$, si ha dunque che $a_{j_1 j_2 \ldots j_q}$ e' il minore $q \times q$ di A costituito dalle colonne di indici $j_1, j_2, \ldots, j_m$; in termini di bracket, si ha

$$a_{j_1 j_2 \ldots j_q} = [j_1, j_2, \ldots, j_q](A).$$

Gli estensori non nulli di step q formano la varieta' Grassmanniana nello spazio proiettivo $\mathrm{P}(\Lambda^q[V])$ (cfr Lez. V).

Gli estensori non nulli sono caratterizzati dalla

Proposition 5. *Sia $a_1, a_2, \ldots, a_p \in V$ una sequenza di p vettori in V e sia $A = a_1 a_2 \cdots a_p$ il corrispondente estensore in $\Lambda^p[V]$; allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:*
-i vettori $a_1, a_2, \ldots, a_p$ sono linearmente indipendenti;
-$A \neq 0$.

Il significato geometrico degli estensori e' dato dalla

Proposition 6. *Siano $a_1, \ldots a_p$ e $b_1, \ldots b_q$ due sequenze di vettori linearmente indipendenti in V, e siano $A = a_1 \cdots a_p$ e $B = b_1 \cdots b_q$ i corrispondenti estensori; allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

- il sottospazio $L(a_1,\ldots,a_p)$ generato dagli a_i coincide col sottospazio $L(b_1,\ldots,b_q)$ generato dai b_j;

-$A = cB$ con $c \in \mathbb{K}$ $(c \neq 0)$.

In caso affermativo, da entrambi i punti di vista si ha in particolare che $p = q$.

Alle varie rappresentazioni di uno stesso estensore non nullo A di step p come prodotto di p vettori corrispondono dunque varie basi di uno stesso sottospazio di dimensione p di V, sottospazio che indichiamo con $\overline{A}$. Il significato geometrico del prodotto di estensori e' dato dalla

Proposition 7. *Siano $A, B \neq 0$ due estensori non nulli. Allora*

$$AB \neq 0 \quad \textit{se e solo se } \overline{A} \cap \overline{B} = \{0\};$$

inoltre, in caso affermativo si ha

$$\overline{AB} = \overline{A} \oplus \overline{B}.$$

Quando si vuole sottolineare la relazione del prodotto nell'algebra esterna con l'operazione di somma di saottospazi, si indica tale prodotto col termine "join" e lo si denota col simbolo $\vee$ (nella trattazione che stiamo presentando, il simbolo $\wedge$ verra' usato per indicare un'altro prodotto nell'algebra esterna, in relazione all'operazione di intersezione di sottospazi).

7.2 Bialgebra esterna

Dati due spazi vettoriali V, W, consideriamo le corrispondenti algebre esterne $\Lambda[V]$ e $\Lambda[W]$. Lo spazio vettoriale $\Lambda[V] \otimes \Lambda[W]$ e' un'algebra associativa con unita' rispetto al prodotto definito sugli estensori ponendo

$$(a_1 \cdots a_p \otimes b_1 \cdots b_q)\,(a'_1 \cdots a'_r \otimes b'_1 \cdots b'_s) = \\ = (-)^{qr} a_1 \cdots a_p a'_1 \cdots a'_r \otimes b_1 \cdots b_q b'_1 \cdots b'_s$$

ed estendendo per bilinearita'. L'algebra cosi' ottenuta risulta essere isomorfa all'algebra esterna sullo spazio $V \oplus W$ (somma diretta esterna):

$$\Lambda[V] \otimes \Lambda[W] \simeq \Lambda[V \oplus W].$$

Dato uno spazio vettoriale V, esiste uno ed un solo morfismo d'algebra, detto coprodotto

$$\Delta : \Lambda[V] \to \Lambda[V] \otimes \Lambda[V],$$

tale che

$$\Delta(1) = 1 \otimes 1, \quad \Delta(v) = v \otimes 1 + 1 \otimes v, \quad \forall v \in V.$$

La struttura costituita dallo spazio vettoriale $\Lambda[V]$ con le operazioni di prodotto e coprodotto si dice "bialgebra esterna" su V.

Esempio. Il coprodotto di un'estensore di step 2 e' dato da

$$\begin{aligned}\Delta(a_1a_2) = \Delta(a_1)\Delta(a_2) = (a_1 \otimes 1 + 1 \otimes a_1)\,(a_2 \otimes 1 + 1 \otimes a_2) = \\ = (a_1 \otimes 1)(a_2 \otimes 1) + (a_1 \otimes 1)(1 \otimes a_2) + (1 \otimes a_1)(a_2 \otimes 1) + (1 \otimes a_1)(1 \otimes a_2) = \\ = a_1a_2 \otimes 1 + a_1 \otimes a_2 - a_2 \otimes a_1 + 1 \otimes a_1a_2\end{aligned}$$

Il coprodotto di un estensore e' dato da

$$\Delta(a_1 \cdots a_p) = \sum sgn(i_1i_2 \ldots j_1j_2 \ldots)\ a_{i_1}a_{i_2} \cdots \otimes a_{j_1}a_{j_2} \cdots$$

dove la sommatoria e' estesa a tutte le coppie ordinate $((i_1, i_2, \ldots), (j_1, j_2, \ldots))$ costituite da una sequenza crescente $i_1 < i_2 < \ldots$, e da una sequenza crescente $j_1 < j_2 < \ldots$ la cui concatenazione $(i_1, i_2, \ldots, j_1, j_2, \ldots)$ sia una permutazione delle sequenza $(1, 2, \ldots, p)$; il simbolo $sgn(i_1i_2 \ldots j_1j_2 \ldots)$ indica il segno della permutazione.

Nella notazione breve di Sweedler, per ogni tensore antisimmetrico A (non necessariamente estensore) si scrive

$$\Delta(A) = \sum_{(A)} A_{(1)} \otimes A_{(2)}.$$

7.3 Algebra di Cayley-Grassmann

Sia ora V uno spazio vettoriale di dimensione finita m, e sia

$$[\,] : V \times \cdots \times V \to \mathbb{K}$$

un'applicazione $m-$lineare alternante non degenere, detta "bracket" (il termine "bracket" viene usato con piu' significati leggermente diversi, in ogni caso il significato corretto dovrebbe risultare chiaro dal contesto). Le possibili bracket su uno stesso spazio differiscono l'una dall'altra per un fattore moltiplicativo scalare non nullo. Lo struttura costituita dallo spazio vettoriale V e da una fissata bracket $[\ ]$ si dice "spazio di Peano".

L'algebra esterna di uno spazio di Peano puo' essere definita direttamente nei termini della bracket. In ogni caso, alla bracket come applicazione $m-$lineare alternante non degenere

$$[\ ] : V \times \cdots \times V \to \mathbb{K}$$

corrisponde un'applicazione lineare non nulla detta ancora bracket e denotata allo stesso modo

$$[\ ] : \Lambda^m[V] \to \mathbb{K}.$$

Risulta inoltre utile estendere il dominio di $[\ ]$ a tutta l'algebra $\Lambda[V]$ ponendo $[A] = 0$ per ogni tensore antisimmetrico omogeneo A di step diverso da m.

Sia $(V, [\ ])$ uno spazio di Peano. Il prodotto di "meet" e' l'applicazione bilineare

$$\wedge : \Lambda[V] \times \Lambda[V] \to \Lambda[V]$$

definita da

$$A \wedge B = \sum_{(A)} [A_{(1)} B] A_{(2)}.$$

In particolare, per ogni $A = a_1 \cdots a_p$ e $B = b_1 \cdots b_q$ estensori di step rispettivi p e q si ha

$$A \wedge B = \sum sgn(i_1 i_2 \ldots j_1 j_2 \ldots)\ [a_{i_1} a_{i_2} \cdots b_1 \cdots b_q] a_{j_1} a_{j_2} \cdots\ ,$$

dove la sommatoria e' estesa a tutte le coppie ordinate di sequenze crescenti la cui concatenazione sia una permutazione delle sequenza $(1, 2, \ldots, p)$. Per la definizione della bracket si ha

$$A \wedge B = 0, \quad \text{a meno che } p + q \geq m;$$

in tal caso, si ha

$$A \wedge B = \sum sgn(i_1 \ldots i_{m-q} j_1 \ldots j_{p+q-m})\ [a_{i_1} \cdots a_{i_{m-q}} b_1 \cdots b_q] a_{j_1} \cdots a_{j_{p+q-m}}.$$

Esempi In $\Lambda[V]$, dove V e' uno spazio di Peano di dimensione $m = 3$, si ha

$$\begin{aligned}
(a_1a_2a_3) \wedge b &= [a_1a_2b]a_3 - [a_1a_3b]a_2 + [a_2a_3b]a_1 \\
b \wedge (a_1a_2a_3) &= [a_1a_2a_3]b \\
(a_1a_2) \wedge (b_1b_2) &= [a_1b_1b_2]a_2 - [a_2b_1b_2]a_1 \\
(a_1a_2) \wedge b &= [a_1a_2b] \\
a \wedge b &= 0
\end{aligned}$$

$(a, a_1, \ldots, b, b_1 \ldots \in V.)$

Le principali proprieta' del prodotto meet sono date dal

Theorem 9. *L'operazione di meet $\wedge : \Lambda[V] \times \Lambda[V] \to \Lambda[V]$ e'*

-associativa:

$$(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C), \qquad \forall A, B, C \in \Lambda[V];$$

commutativa con segno:

$$A \wedge B = (-)^{(m-p)(m-q)} B \wedge A, \qquad \forall A \in \Lambda^p[V],\ B \in \Lambda^q[V].$$

Il significato geometrico del meet di estensori e' dato dalla

Proposition 8. *Siano $A, B \neq 0$ due estensori non nulli. Allora*

$$A \wedge B \neq 0 \quad \textit{se e solo se } \overline{A} + \overline{B} = V;$$

inoltre, in caso affermativo si ha

$$\overline{A \wedge B} = \overline{A} \cap \overline{B}.$$

7.3.1 Applicazioni, cenni

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 3, e si consideri il piano proiettivo con punti i sottospazi 1-dimensionali di V, con rette i sottospazi 2-dimensionali di V, e relazione d'incidenza l'inclusione insiemistica. Siano $a_1, a_2, a_3 \in V$ e $b_1, b_2, b_3 \in V$ due terne di vettori in posizione sufficientemente generale.

Si ha che le seguenti due affermazioni nel piano proiettivo

(1)- le tre rette

$$L(a_1, b_1),\ L(a_2, b_2),\ L(a_3, b_3)$$

si intersecano in un punto;
(2)- i tre punti

$$L(a_1, a_2) \cap L(b_1, b_2),\ L(a_1, a_3) \cap L(b_1, b_3),\ L(a_2, a_3) \cap L(b_2, b_3),$$

sono allineati;

sono rispettivamente equivalenti alle seguenti due uguaglianze nell'algebra di Cayley-Grassmann di V :

$$\begin{array}{ll} (1') & (a_1b_1) \wedge (a_2b_2) \wedge (a_3b_3) = 0. \\ (2') & [(a_1a_2 \wedge b_1b_2)\,(a_1a_3 \wedge b_1b_3)\,(a_2a_3 \wedge b_2b_3)] = 0. \end{array}$$

Si prova che nell'algebra di Cayley-Grassmann di V vale l'identita'

$$[(a_1a_2 \wedge b_1b_2)\,(a_1a_3 \wedge b_1b_3)\,(a_2a_3 \wedge b_2b_3)] = \\ -\,[a_1a_2a_3][b_1b_2b_3](a_1b_1) \wedge (a_2b_2) \wedge (a_3b_3).$$

Questa identita' implica il seguente teorema nel piano proiettivo su V :

> (Teorema di Desargues) le tre rette $L(a_i, b_i)$ sono concorrenti se e solo se sono allineati i tre punti $L(a_i, a_j) \cap L(b_i, b_j)$

7.4 Lezione XI

7.4.1 Commenti

In questo paragrafo sia V uno spazio vettoriale di dimensione 3 su un campo $\mathbb{K}$.

(1) Siano $S, T \subset V$ due diversi sottospazi di dimensione 2; si ha allora che $S+T=V$ e che $S \cap T$ e' un sottospazio di dimensione 1. Se due vettori a_1, a_2 formano una base di S e due vettori b_1, b_2 formano una base di T, allora il vettore

$$a_1 a_2 \wedge b_1 b_2 = c = -b_1 b_2 \wedge a_1 a_2$$

e' una base di $S \cap T$. La formule

$$+[a_1 b_1 b_2] a_2 - [a_2 b_1 b_2] a_1 = c = -[b_1 a_1 a_2] b_2 + [b_2 a_1 a_2] b_1$$

forniscono le espansioni di c rispetto alla base di S e rispetto alla base di T.

(2) Siano a, b_1, b_2, b_3 vettori di V; allora si ha

$$a \wedge b_1 b_2 b_3 = b_1 b_2 b_3 \wedge a,$$

esplicitamente

$$[b_1 b_2 b_3] a = [b_1 b_2 a] b_3 - [b_1 b_3 a] b_2 + [b_2 b_3 a] b_1;$$

se b_1, b_2, b_3 e' una base di V allora $[b_1 b_2 b_3] \neq 0$ e si ha l'espansione

$$a = \frac{[b_1 b_2 a]}{[b_1 b_2 b_3]} b_3 - \frac{[b_1 b_3 a]}{[b_1 b_2 b_3]} b_2 + \frac{[b_2 b_3 a]}{[b_1 b_2 b_3]} b_1$$

di a rispetto alla base di V. Questa espansione e' una forma della regola di Cramer in dimensione 3.

7.4.2 In generale

Sia $(V, [\,])$ uno spazio di Peano di dimensione m, e sia $\mathrm{CG}[V] = (\Lambda[V], \vee, \wedge)$ l'algebra di Cayley-Grassmann corrispondente; d'ora innanzi spesso chiameremo gli elementi di $\Lambda[V]$ "tensori" (sottintendendo "antisimmetrici") e li indicheremo con lettere minuscole, latine o greche. Per brevita', nelle espressioni si suppone che il join abbia la precedenza sul meet, e si omette il simbolo del join; cosi' ad esempio l'espressione $(s \vee t) \wedge u$ si scrive in breve $st \wedge u$. Ogni estensore non nullo ha un suo ben definito step (il numero dei fattori in una sua scrittura come prodotto di vettori); per ciascun intero p fissato, gli estensori di step p generano un sottospazio $\Lambda^p[V]$, i cui elementi non nulli si dicono tensori omogenei di step p. Per ciascun tensore omogeneo non nullo t, indichiamo con $|t|$ il suo step; non definiamo lo step del tensore nullo. Si ha

$$|t \vee s| = |t| + |s|, \qquad |t \wedge s| = |t| + |s| - m,$$

(quando tutti gli step sono definiti) e

$$t \vee s = (-)^{|t||s|} s \vee t, \qquad t \wedge s = (-)^{(m-|t|)(m-|s|)} s \wedge t.$$

La commutativita' con segno del meet significa

$$\sum_{(t)} \left[t_{(1)} s\right] t_{(2)} = (-)^{(m-|t|)(m-|s|)} \sum_{(s)} \left[s_{(1)} t\right] s_{(2)},$$

e puo' essere riscritta come

$$\sum_{(t)} \left[t_{(1)} s\right] t_{(2)} = \sum_{(s)} \left[t s_{(2)}\right] s_{(1)}.$$

Se $t = b_1 \cdots b_p$ e' un estensore associato ad una base di un sottospazio T di dimensione p ed $s = a_1 \cdots a_q$ e' un estensore associato ad una base di un sottospazio S di dimensione q tali che $S + T = V$, allora enrambi i membri dell'uguaglianza di sopra forniscono un estensore c associato ad una base del sottospazio $T \cap S$ di dimensione $p + q - m$, il due membri possono essere presi come le espansioni di c rispetto alla basi di $\Lambda^{p+q-m}[T]$ e di $\Lambda^{p+q-m}[S]$ indotte dalle basi di T e d S, rispettivamente.

Se t e' un tensore omogeneo, ed s e' un estensore di step massimo $|s| = m$, in particolare si ha

$$[s]\, t = \sum_{(s)} \left[t s_{(2)}\right] s_{(1)},$$

e se $s \neq 0$, si ricava

$$t = \sum_{(s)} \frac{\left[t s_{(2)}\right]}{[s]} s_{(1)},$$

che e' una versione della regola di Cramer per i tensori antisimmetrici.

7.4.3 Spazio dei divisori di un tensore

Sia $(V, [\ ])$ uno spazio di Peano di dimensione m, e sia $\mathrm{CG}[V]$ la sua algebra di Cayley-Grassmann. Siano $s, t \in \Lambda[V]$ tensori omogenei non nulli, con $|s| \leq |t|$; diciamo che s divide t, e scriviamo $s|t$ se e solo se esiste un $t' \in \Lambda[V]$ tensore omogeneo tale che $t = t's$.

Proposition 9. *Un vettore $0 \neq v \in V$ divide un tensore omogeneo $0 \neq t \in \Lambda[V]$ se e solo se $tv = 0$; in tale caso, si ha*

$$t = \lambda(t \wedge v')v,$$

dove $v' \in \Lambda[V]$ e' un qualsiasi estensore di step $|v'| = m - 1$ tale che $vv' \neq 0$, e $\lambda \in \mathbb{K}$ e' un opportuno scalare.

Dimostrazione. Proviamo la parte non banale dell'enunciato. Sia $v \in V$ un vettore non nullo tale che $tv = 0$; esistono dunque $m - 1$ vettori di V che insieme a v formano una base di V; sia v' l'estensore prodotto di questi $m-1$ vettori; chiaramente si ha $vv' \neq 0$. Per la regola di Cramer generale si ha

$$[vv']t = \sum_{(vv')} \left[t(vv')_{(2)}\right] (vv')_{(1)}.$$

Osserviamo che

$$\begin{aligned}\Delta(vv') = \Delta(v)\Delta(v') = (v \otimes 1 + 1 \otimes v) \sum_{(v')} v'_{(1)} \otimes v'_{(2)} = \\ = \sum_{(v')} vv'_{(1)} \otimes v'_{(2)} + \sum_{(v')} (-)^{|v'_{(1)}|} v'_{(1)} \otimes vv'_{(2)}.\end{aligned}$$

Dunque

$$\begin{aligned}\sum_{(vv')} \left[t(vv')_{(2)}\right] (vv')_{(1)} &= \sum_{(v')} \left[tv'_{(2)}\right] vv'_{(1)} + \sum_{(v')} (-)^{|v'_{(1)}|} \left[tvv'_{(2)}\right] v'_{(1)} \\ &= \sum_{(v')} \left[tv'_{(2)}\right] vv'_{(1)} \\ &= (-)^{|t|-1} (\sum_{(v')} \left[tv'_{(2)}\right] v'_{(1)})v \\ &= (-)^{|t|-1}(t \wedge v')v.\end{aligned}$$

Nel secondo passaggio si e' usata l'ipotesi $tv = 0$. Dunque si ha

$$[vv']t = (-)^{|t|-1}(t \wedge v')v.$$

Dividendo entrambe i membri per $[vv'] \neq 0$ si ottiene la tesi.

Osservazione. Dalla Proposizione segue in particolare che per ogni tensore omogeneo $t \in \Lambda[V]$, l'insieme dei vettori divisori di t

$$\underline{V}[t] = \{v \in V : \ v|t\}$$

(compreso lo 0) e' un sottospazio di V. (Infatti da $u, v|t$ segue $tu = tv = 0$ da cui per ogni $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ segue $t(\lambda u + \mu v) = 0$ da cui segue $(\lambda u + \mu v)|t$.)

Con argomenti simili a quelli della dimostrazione precedente si prova la

Proposition 10. *Sia $0 \neq t \in \Lambda[V]$ un tensore omogeneo. Se i vettori $v_1, \ldots, v_h \in V$ linearmente idipendenti dividono t, allora anche l'estensore $v_1 \cdots v_h$ divide t, inoltre*

$$t = \lambda(t \wedge v')v_1 \cdots v_h,$$

dove $v' \in \Lambda[V]$ e' un qualsiasi estensore di step $|v'| = m - h$ tale che $v_1 \cdots v_h v' \neq 0$, e $\lambda \in \mathbb{K}$ e' un opportuno scalare.

Osservazione. Dalla Proposizione segue in particolare che per ogni tensore omogeneo $t \in \Lambda[V]$, si ha

$$\dim \underline{V}[t] \leq |t|,$$

dove vale l'uguale se e solo se t e' un estensore.

7.4.4 Tensori di co-step 1

Se V e' uno spazio vettoriale di dimensione m, allora ogni tensore $t \in \Lambda[V]$ omogeneo di step $|t| = m - 1$ e' un estensore. Lo proviamo per induzione su $m \geq 1$. L'affermazione e' ovvia per $m = 1$, sia dunque $m > 1$. Fissata una base $e_1, e_2, \ldots, e_m$ di V, si ha

$$t = a_m e_1 e_2 \cdots e_{m-1} + a_{m-1} e_1 e_2 \cdots e_{m-2} e_m + \cdots + a_1 e_2 e_3 \cdots e_m,$$

con $a_* \in \mathbb{K}$. Distinguiamo due casi:

-Se per un certo indice i si ha $a_i = 0$, allora

$$t = t'e_i,$$

con t' tensore omogeneo di step $|t'| = m-2$ sullo spazio di dimensione $m-1$ generato dai vettori $e_1, \ldots, e_{i-1}, e_{i+1}, \ldots, e_m$; per l'ipotesi di induzione, t' e' un estensore, e dunque anche t e' un estensore.

-Se per ciascun indice i si ha $a_i \neq 0$, allora possiamo porre $a_m = 1$; si ha

$$\begin{aligned} t = e_1 e_2 \cdots e_{m-1} + a_{m-1} e_1 e_2 \cdots e_{m-2} e_m + \cdots + a_1 e_2 e_3 \cdots e_m = \\ = (e_1 + a_1 e_m)(e_2 + a_2 e_m) \cdots (e_{m-1} + a_{m-1} e_m) \end{aligned}$$

7.4.5 Relazioni di Grassmann-Plucker

La nozione di estensore, che si esprime nei soli termini di algebra esterna, si puo' cratterizzare in modo efficace nell'algebra di Cayley-Grassmann.

Theorem 10 (Relazioni di Grassmann-Plucker)**.** *Sia V uno spazio di Peano di dimensione m. Un tensore antisimmetrico t omogeneo di step $|t| = h$ e' un estensore se e solo se*

$$t\xi \wedge t = 0, \qquad \forall \xi \textit{ estensore, con } |\xi| = m-h-1.$$

Si noti che per linearita' il numero delle condizioni e' dato da

$$\dim \Lambda^{m-h-1}[V] = \binom{m}{h+1}.$$

La parte facile dell'enunciato e' costituita dall'affermazione che se il tensore t di step h e' un estensore allora $t\xi \wedge t = 0$ per ogni estensore ξ di step $m-h-1$; infatti, se t e' un estensore, allora per ogni estensore ξ di step $m-h-1$ si ha che: (1) $t\xi$ e' un estensore di step $m-1$, (2) a $t\xi$ corrisponde un sottospazio che contiene il sottospazio corrispondente a t, (3) la somma dei due sottospazi e' propriamente contenuta in V, (4) $t\xi \wedge t = 0$.

Esercizio. Sia V uno spazio di Peano di dimensione 4, e sia e_i $(1 \leq i \leq 4)$ una base di V.

(1) Consideriamo un tensore antisimmetrico di step 2 su V

$$t = \sum_{1 \leq i < j \leq 4} t_{ij} e_i e_j.$$

Supponiamo che t sia decoponibile

$$t = \left[\sum_{1 \leq i \leq 4} a_{1i} e_i \right] \left[\sum_{1 \leq j \leq 4} a_{1j} e_j \right];$$

allora, posto

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix},$$

si ha

$$t_{ij} = \det \begin{pmatrix} a_{1i} & a_{1j} \\ a_{2i} & a_{2j} \end{pmatrix}.$$

Utilizzando le relazioni fra i minori massimali di una matrice, si scrivano le relazioni soddisfatte dalle coordinate t_{ij} (cfr Lez V).
(2) Consideriamo il generico tensore antisimmetrico di step 2 su V

$$t = \sum_{1 \leq i < j \leq 4} t_{ij} e_i e_j$$

Posto $\xi = e_1$, si esprima la condizione

$$t\xi \wedge t = 0$$

in funzione delle coordinate t_{ij} di t.
(3) Si confrontino le relazioni trovate ai punti (1) e (2).

7.4.6 Span di un tensore

Sia $(V, [\ ])$ uno spazio di Peano di dimensione m, e sia $\mathrm{CG}[V]$ la sua algebra di Cayley-Grassmann. Diciamo che un tensore omogeneo $t \in \Lambda[V]$ e' rappresentabile su un sottospazio $W \subseteq V$ se e solo se $t \in \Lambda[W]$. Risulta che la nozione di rappresentabilita' di un tensore su un sottospazio e' duale della nozione di divisibilita' di un tensore per un estensore. Un primo passo in questa direzione e' dato dalla

Proposition 11. *Un tensore omogeneo $0 \neq t \in \Lambda[V]$ e' rappresentabile su un sottospazio $W \subseteq V$ di codimensione 1 in V, se e solo se per un estensore ξ associato a W si ha*

$$t \wedge \xi = 0.$$

Si giunge in particolare a provare che per ogni tensore omogeneo $t \in \Lambda[V]$ esiste un minimo sottospazio di V sul quale t e' rappresentabile, sottospazio indicato con $\mathrm{Span}[t]$, e che si ha

$$\dim \mathrm{Span}[t] \geq |t|,$$

dove vale l'uguale se e solo se t e' un estensore.

Esercizio. Sia V uno spazio di Peano di dimensione 4.

(1) Si provi che per un tensore antisimmetrico t di step 2 su V le due seguenti affermazioni sono equivalenti:

$$\begin{aligned} \underline{V}[t] &= \{0\}, \\ \mathrm{Span}[t] &= V. \end{aligned}$$

(2) Si dia un esempio di un tensore antisimmetrico t di step 2 su V tale che $\mathrm{Span}[t] = V$.

7.5 Lezione XII

In questa lezione presentiamo brevemente il metodo simbolico per gli invarianti dei tensori antisimmetrici; rimandiamo a [GRS] per una trattazione sistematica di questo argomento, e a [G] per ulteriori sviluppi.

7.5.1 Pfaffiano

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione m su un campo $\mathbb{K}$, con una base e_i $(1 \leq i \leq m)$; per semplicita' supponiamo $char(\mathbb{K}) = 0$. Nell'algebra esterna $\Lambda[V]$ consideriamo un tensore t di step 2

$$t = \sum_{1 \leq i < j \leq m} a_{ij} e_i e_j;$$

possiamo riscrivere

$$t = \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i,j \leq m} a_{ij} e_i e_j \qquad (a_{ij} = -a_{ji}),$$

ed associare a t la matrice $m \times m$ antisimmetrica (a_{ij}).

Osserviamo che le matrici antisimmetriche di ordine dispari hanno determinante nullo (... essendo $char(\mathbb{K}) \neq 2$). Per quelle di ordiune pari si prova che

Proposition 12. *Sia $A = (a_{ij})$ una matrice quadrata antisimmetrica di ordine pari $m = 2p$ con elementi indeterminate a_{ij} (con $a_{ij} = -a_{ji}$). Allora il polinomio $\det(A) \in \mathbb{Z}[a_{ij}]$ determinante di A e' il quadrato di uno ed un solo polinomio monico (in un certo senso) in $\mathbb{Z}[a_{ij}]$, detto Pfaffiano di A ed indicato con $\mathrm{Pf}(A)$:*

$$\det(A) = \mathrm{Pf}(A)^2;$$

esplicitamente, si ha

$$\mathrm{Pf}(A) = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma} (-)^{\sigma} a_{\sigma_1 \sigma_2} a_{\sigma_3 \sigma_4} \ldots a_{\sigma_{m-1} \sigma_m}$$

dove σ varia fra le permutazioni della sequenza $1, \ldots, m$ tali che $\sigma_1 < \sigma_2$, $\sigma_3 < \sigma_4$, ... $\sigma_{m-1} < \sigma_m$.

Una scrittura piu' essenziale dello Pfaffiano e' data da

$$\mathrm{Pf}(A) = \sum_{\pi} \; sgn(\pi) \prod_{B \in \pi} a_B,$$

dove: la sommatoria e' estesa a tutte le partizioni π dell'insieme $\{1, \ldots, m\}$ in blocchi di ordine 2; per ogni partizione π la produttoria e' estesa a tutti i blocchi B di π; per ogni blocco B di elementi $h < k$ si ha $a_B = a_{hk}$; il segno $sgn(\pi)$ della partizione π e' il segno di una qualsiasi permutazione di $\{1, 2, \ldots, m\}$ ottenuta elencando in un qualsiasi ordine i vari blocchi di π e in ciascun blocco elencando i suoi due elementi in ordine crescente.

Esempio. Consideriamo una matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & a_{24} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & a_{34} \\ -a_{14} & -a_{24} & -a_{34} & 0 \end{pmatrix}$$

antisimmetrica di ordine 4. Le partizioni dell'insieme $\{1, 2, 3, 4\}$ in blocchi di ordine 2 sono

$$\{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}, \quad \{\{1, 3\}, \{2, 4\}\}, \quad \{\{1, 4\}, \{2, 3\}\},$$

con rispettivi segni $sign(1234) = 1$, $sign(1324) = -1$, $sign(1423) = 1$; dunque

$$\mathrm{Pf}(A) = a_{12}a_{34} - a_{13}a_{24} + a_{14}a_{23}.$$

Il significato geometrico dello Pfaffiano e' dato dal

Proposition 13. *Sia t un tensore antisimmetrico di step 2 sullo spazio V di dimensione m, e sia A la matrice antisimmetrica ad esso associata. Allora t e' rappresentabile su un sottospazio proprio di V se e solo se* $\mathrm{Pf}(A) = 0$.

7.5.2 Invarianti di tensori antisimmetrici

Sia $\mathbb{K}$ un campo con $char(\mathbb{K}) \neq 0$. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione m su $\mathbb{K}$ con una base e_i $(1 \leq i \leq m)$, siano SL_m e $\mathfrak{sl}_m$ il gruppo e l'algebra di Lie speciali lineari di matrici quadrate di ordine m su $\mathbb{K}$, con la loro azione sinistra usuale su V. Per ciascun n (con $1 \leq n \leq m$), queste azioni sinistre inducono (rispettivamente diagonalmente e per derivazione) azioni sinistre su $\Lambda^n[V]$, che a loro volta inducono azioni destre su $\Lambda^n[V]^*$, date da

$$(\tau A)(t) = \tau(At), \qquad (\tau \in \Lambda^n[V_m]^*,\ A \in \ldots,\ t \in \Lambda^n[V_m]),$$

che a loro volta inducono (rispettivamente diagonalmente e per derivazione) azioni destre su $\mathrm{Sym}[\Lambda^n[V]^*] \cong \mathbb{K}[\Lambda^n[V]]$.

Alla base e_i ($i \in I_m = \{1, 2, \ldots, m\}$) di V corrisponde la base di $\Lambda^n[V]$

$$e_I, \qquad (I \subseteq I_m,\ |I| = n),$$

dove per ogni sottinsieme I di elementi $i_1 < i_2 < \ldots < i_n$, si e' posto

$$e_I = e_{i_1} e_{i_2} \cdots e_{i_n}.$$

A questa base corrisponde la base di $\Lambda^n[V]^*$

$$\varepsilon_I, \qquad (I \subseteq I_m,\ |I| = n),$$

definita da

$$\varepsilon_I(e_J) = \delta_{IJ}, \qquad \forall ...$$

L'azione delle matrici elementari E_{ij} sugli elementi di queste basi puo' essere descritta come segue

$$E_{ij} \cdot e_H = \begin{cases} (-)^{s(i,j,H)} e_{H-j+i} & \text{se } j \in H \text{ e } i \notin H \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$
$$\varepsilon_H \cdot E_{ij} = \begin{cases} (-)^{s(i,j,H)} \varepsilon_{H-i+j} & \text{se } i \in H \text{ e } j \notin H \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

I simboli sopra usati hanno il seguente significato: $H - j + i$ e' l'insieme ottenuto da H togliendo l'elemento j ed aggiungendo l'elemento i; analogamente per $H - i + j$; $s(i, j, H)$ e' la cardinalita' dell'intersezione fra il segmento di estremi i, j (esclusi) e H.

Siamo interessati agli elementi di $\mathbb{K}[\Lambda^n[V]]$ che sono fissati dall'azione di SL_m, equivalemtemente, agli elementi di $\mathbb{K}[\Lambda^n[V]]$ che sono annullati dall'azione di $\mathfrak{sl}_m$; ci riferiamo a questi elementi con la locuzione "invarianti di un tensore antisimmetrico di step n in dimensione m", o semplicemente "invarianti" quando il resto sia chiaro dal contesto. Si ha che $\mathcal{J} \in \mathbb{K}[\Lambda^n[V]]$ e' un invariante se e solo se

$$\mathcal{J} \cdot (\mathrm{I} + \lambda E_{ij}) = \mathcal{J}, \qquad \forall i \neq j,\ \lambda \in \mathbb{K}$$

equivalentemente, se e solo se

$$\mathcal{J} \cdot E_{ij} = 0, \qquad \forall i \neq j,$$

ci si puo' limitare a considerare le coppie i, j con $|i - j| = 1$.

Esempio. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 4 su $\mathbb{K}$, con una base e_i $(1 \leq i \leq 4)$. Consideriamo lo spazio $\Lambda^2[V]$ dei tensori antisimmetrici di step 2 su V

$$t = \varepsilon_{12}(t)e_{12} + \varepsilon_{13}(t)e_{13} + \varepsilon_{14}(t)e_{14} + \varepsilon_{23}(t)e_{23} + \varepsilon_{24}(t)e_{24} + \varepsilon_{34}(t)e_{34}.$$

Consideriamo lo Pfaffiano

$$\mathrm{Pf}_4 = \varepsilon_{12}\varepsilon_{34} - \varepsilon_{13}\varepsilon_{24} + \varepsilon_{14}\varepsilon_{23}.$$

Si verifica che:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Pf} \cdot E_{12} &= \cdots = -\varepsilon_{23}\varepsilon_{24} + \varepsilon_{24}\varepsilon_{23} = 0 \\
\mathrm{Pf} \cdot E_{23} &= \cdots = \quad \varepsilon_{13}\varepsilon_{34} - \varepsilon_{13}\varepsilon_{34} = 0 \\
\mathrm{Pf} \cdot E_{34} &= \cdots = -\varepsilon_{14}\varepsilon_{24} + \varepsilon_{14}\varepsilon_{24} = 0,
\end{aligned}$$

e analogamente, $\mathrm{Pf} \cdot E_{21} = \mathrm{Pf} \cdot E_{32} = \mathrm{Pf} \cdot E_{43} = 0$. Dunque lo Pfaffiano e' un invariante di un tensore antisimmetrico di step 2 in dimensione 4.

Piu' in generale, si prova che per m pari lo Pfaffiano

$$\mathrm{Pf}_m = \sum_{\pi} sgn(\pi) \prod_{B \in \pi} \varepsilon_B,$$

(π variabile fra le partizioni di $\{1, \ldots, m\}$ in blocchi di ordine 2) e' un invariante di un tensore antisimmetrico di step 2 in dimensione m.

7.5.3 Operatore umbrale $U_{m,n} : \Lambda[L|P_m] \to \mathbb{K}[\Lambda^n[V_m]$

Sia $\mathbb{K}$ un campo con $char(\mathbb{K}) = 0$. Consideriamo la superalgebra letterplace

$$\Lambda[L|P_m],$$

dove L e' un insieme numerabile di simboli di $\mathbb{Z}_2-$ grado 0, con un ordine totale del tipo dei numeri naturali, e P_m e' l'insieme dei simboli $\{1, 2, \dots, m\}$ con $\mathbb{Z}_2-$grado 1, con l'ordine usuale; quest'algebra e' generata dalle variabili letterplace $(a|i)$ soggette alle relazioni di anticommutazione

$$(a|i)^2 = 0, \quad \text{dunque} \quad (a|i)(b|j) = -(b|j)(a|i), \quad \forall ...$$

Una base lineare e' costituita dai monomi del tipo

$$(a|i_1)(a|i_2)\cdots(a|i_p)(b|j_1)(b|j_2)\cdots(b|j_q)\cdots(c|h_1)(c|h_2)\cdots(c|h_r)$$

dove $a < b < \ldots < c$ in L e $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_p \leq m$, ...; il monomio di sopra puo' essere scritto anche come

$$(a^{(p)}|i_1 i_2 \cdots i_p)(b^{(q)}|j_1 j_2 \cdots j_q)\cdots(c^{(r)}|h_1 h_2 \cdots h_r)$$

dove ciascun fattore e' un biprodotto con parte sinistra una potenza divisa ($a^{(p)} = a^p/p!$ ...) Riguardiamo l'algebra $\Lambda[L|P_m]$ come $\mathfrak{sl}_m-$modulo destro, dove l'azione e' data rappresentando le matrici elementari come polarizzazioni destre

$$(a|i) \cdot E_{jh} = (a|i)\ {}_{jh}\mathrm{D} = \delta_{ij}(a|h), \qquad \forall \ldots$$

Definition 2. *Siano $\Lambda[L|P_m]$ e $\mathbb{K}[\Lambda^n[V_m]]$ le algebre definite sopra; sia e_i ($1 \leq i \leq m$) una base di V_m e siano $\varepsilon_{i_1 \dots i_n}$ ($1 \leq i_1 < \ldots < i_n \leq m$) le corrispondenti funzioni coordinate su $\Lambda^n[V_m]$. Definiamo un operatore lineare*

$$U = U_{m,n} : \Lambda[L|P_m] \to \mathbb{K}[\Lambda^n[V_m]], \quad Q \mapsto \langle U|Q\rangle,$$

assegnando il suo valore sulla base dei monomi nelle variabili letterplace ponendo

$$\langle U|(a^{(p)}|i_1 \cdots i_p)\rangle = \begin{cases} \varepsilon_{i_1 \dots i_n} & se\ p = n \\ 0 & se\ p \neq n \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &\langle U|(a^{(p)}|i_1 \cdots i_p)(b^{(q)}|j_1 \cdots j_q)\cdots(c^{(r)}|h_1 \cdots h_r)\rangle = \\ &\qquad = \langle U|(a^{(p)}|i_1 \cdots i_p)\rangle\langle U|(b^{(q)}|j_1 \cdots j_q)\rangle \cdots \langle U|(c^{(r)}|h_1 \cdots h_r)\rangle \end{aligned}$$

per $a < b < \ldots < c$ in L e $1 \leq i_1 < \ldots < i_p \leq m$, ... L'operatore $U_{m,n}$ si dice "operatore umbrale per un tensore antisimmetrico di step n in dimensione m".

Si ha la

Proposition 14. *L'operatore umbrale* $U : \Lambda[L|P_m] \to \mathbb{K}[\Lambda^n[V_m]]$ *e' un epimorfismo di* $\mathfrak{sl}_m-$*moduli destri.*

dalla quale, per il teorema di completa riducibilita' degli $\mathfrak{sl}-$moduli, si ha il

Theorem 11. *Con le stesse notazioni di sopra, si ha:*

$$U\left(\Lambda[L|P_m]^{\mathfrak{sl}_m}\right) = \mathbb{K}[\Lambda^n[V_m]]^{\mathfrak{sl}_m};$$

equivalentemente:

$$U\left(\Lambda[L|P_m]^{\mathrm{SL}_m}\right) = \mathbb{K}[\Lambda^n[V_m]]^{\mathrm{SL}_m}.$$

.. che a sua volta, per il I Teorema fondamentale degli invarianti vettoriali, versione super, porge il

Theorem 12 (I Teorema Fondamentale)**.** *Con le stesse notazioni di sopra, si ha: l'algebra degli invarianti* $\mathbb{K}[\Lambda^n[V_m]]^{\mathrm{SL}_m}$ *e' generata linearmente dalle immagini umbrali* $\langle U|Q\rangle$ *dei dei prodotti*

$$Q = [a_1 \cdots a_m] \cdots [c_1 \cdots c_m]$$

di superbracket in $\Lambda[L|P_m]$*, dove ogni lettera che compare, compare esattamente* n *volte.*

Esempio. Sia $m = 2p$, sia $n = 2$, e siano $a_1 < a_2 < \ldots < a_p$ simboli in L; si ha

$$\begin{aligned}[a_1^{(2)} a_2^{(2)} \cdots a_p^{(2)}] &= (a_1^{(2)} a_2^{(2)} \cdots a_p^{(2)}|12\cdots m) \\ &= \sum_\sigma \; sign(\sigma)\; (a_1^{(2)}|\sigma_1\sigma_2)(a_2^{(2)}|\sigma_3\sigma_4)\cdots(a_p^{(2)}|\sigma_{m-1}\sigma_m) \\ &\qquad\qquad \xrightarrow{U} \sum_\sigma \; sign(\sigma)\; \varepsilon_{\sigma_1\sigma_2}\varepsilon_{\sigma_3\sigma_4}\cdots\varepsilon_{\sigma_{m-1}\sigma_m} = p!\ \mathrm{Pf}_m.\end{aligned}$$

(le sommatorie sono estese alle permutazioni σ di $1, 2, \ldots, m$ tali che $\sigma_1 < \sigma_2$, $\sigma_1 < \sigma_2, \ \ldots, \ \sigma_{m-1} < \sigma_m$).