Matematica I, 25.09.2012

Insiemi

1. Il linguaggio degli insiemi e′ stato sviluppato durante la seconda meta′ dell″800, nell′ambito dell′indagine sui fondamenti della matematica. Da allora e′ stato usato sempre di piu′ sia nella formulazione della matematica che nel suo insegnamento. In questa lezione ci proponiamo di riprendere i termini fondamentali di questo linguaggio.

2. Gli oggetti fondamentali del discorso sono due tipi di enti, gli ″elementi″ e gli ″insiemi″, e una relazione dai primi verso i secondi, la relazione di ″appartenenza″.

   Solitamente, indicheremo gli elementi con lettere minuscole $a, b, c, \ldots$, gli insiemi con lettere maiuscole $A, B, C, ...$; la relazione di appartenenza viene indicata con $\in$.

   La frasi ″l′elemento x appartiene all′insieme A″ e ″l′elemento x non appartiene all′insieme A″ si scrivono rispettivamente

   $$x \in A; \qquad x \notin A.$$

   L′insieme cui non appartiene alcun elemento si dice insieme vuoto e si indica con $\emptyset$. L′insieme dei numeri naturali si indica con $\mathbb{N}$:

   $$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}.$$

   In questa lezione considereremo principalmente come esempi gli insiemi finiti. Si puo′ dare un insieme finito elencando i suoi elementi; indicheremo con $\natural A$ il numero di elementi di un insieme finito A; gli insiemi

   $$\emptyset = \{\}, \quad \{1\}, \quad \{1, 2\}, \quad \{1, 2, 3\}, \quad \ldots$$

   sono i prototipi degli insiemi con $0, 1, 2, 3, \ldots$ elementi.

3. Diciamo che un insieme A e′ contenuto in un insieme B, e scriviamo $A \subseteq B$, se ogni elemento che appartiene ad A appartiene anche a B; in altri termini, per ogni elemento x, se x appartiene ad A allora x appartiene a B; in simboli, questa frase si scrive

   $$\forall x, \quad x \in A \;\Rightarrow\; x \in B$$

   Osserviamo che un insieme A non e′ contenuto in un insieme B se esiste un elemento che appartiene ad A e non appartiene a B; in simboli si scrive

   $$\exists x : \quad x \in A, \; x \notin B$$

   Se A non e′ contenuto in B scriviamo $A \nsubseteq B$.

   Diciamo che un insieme A e′ contenuto propriamente in un insieme B, e scriviamo $A \subset B$, se $A \subseteq B$ e $A \neq B$.

4. L'insieme dei sottinsiemi di un insieme A viene detto insieme delle parti di A e viene indicato con $\mathcal{P}(A)$; in simboli:

   $\mathcal{P}(A) = \{X;\ X \subseteq A\}.$

   Di seguito riportiamo per $n = 0, 1, 2, 3$ l'elenco dei sottinsiemi dell'insieme prototipo con n elementi.

$$\begin{array}{rllll} \mathcal{P}(\{\}) & \{\} & & & \\ & & & & \\ \mathcal{P}(\{1\}) & \{\} & \{1\} & & \\ & & & & \\ & & \{1\} & & \\ \mathcal{P}(\{1,2\}) & \{\} & & \{1,2\} & \\ & & \{2\} & & \\ & & & & \\ & & \{1\} & \{2,3\} & \\ \mathcal{P}(\{1,2,3\}) & \{\} & \{2\} & \{1,3\} & \{1,2,3\} \\ & & \{3\} & \{1,2\} & \end{array}$$

   Osserviamo che

   $\natural\mathcal{P}(\{\}) = 1 \quad \natural\mathcal{P}(\{1\}) = 2 \quad \natural\mathcal{P}(\{1,2\}) = 4 \quad \natural\mathcal{P}(\{1,2,3\}) = 8;$

   cio' fa pensare che

   $\natural\mathcal{P}(\{1, 2, \ldots, n\}) = 2^n,$

   per ogni $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$.

   E cosi' e'. Infatti, per ogni n fissato, un sottinsieme X dell'insieme $\{1, 2, \ldots, n\}$ e' individuato da una serie di risposte si/no alle seguenti domande:

   $1 \in X? \quad 2 \in X? \quad \ldots \quad n \in X?$

   e le possibili serie di risposte sono $2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2$ $(n\ volte) = 2^n$.

5. Sia X un insieme; per ogni A, B sottinsiemi di X,

   - l'intersezione di A e B e' l'insieme $A \frown B$ costituito dagli elementi che appartengono sia ad A che a B :

     $A \frown B = \{x \in X;\ x \in A\ e\ x \in B\};$
   - l'unione di A e B e' l'insieme $A \smile B$ costituito dagli elementi che appartengono ad A oppure a B (non si esclude che appartengano ad entrambi):

     $A \smile B = \{x \in X;\ x \in A\ o\ x \in B\};$
   - il complementare di A in X e' l'insieme A' costituito dagli elementi di X che non appartengono ad A :

     $A' = \{x \in X;\ x \notin A\}.$

Funzioni

1. **Funzioni**

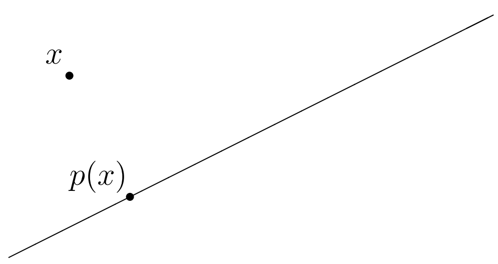
Definizione 1 *Una funzione* $f : A \to B$ *da un insieme* A *verso un insieme* B *e' una legge che associa a ciascun elemento* $a \in A$ *uno ed un solo elemento di* B*; questo elemento viene detto immagine di* a *per* f*, e viene indicato con* $f(a)$*; l'insieme* A *e l'insieme* B *si dicono dominio e codominio della funzione.*

Sia $f : A \to B$ una funzione. Per ogni $b \in B$, un elementi di A la cui immagine e' b viene detto preimmagine di b; l'insieme di tutti gli elementi di A la cui immagine e' b viene detto l'insieme preimmagine di b, e viene indicato con $f^{-1}(b)$; in simboli:

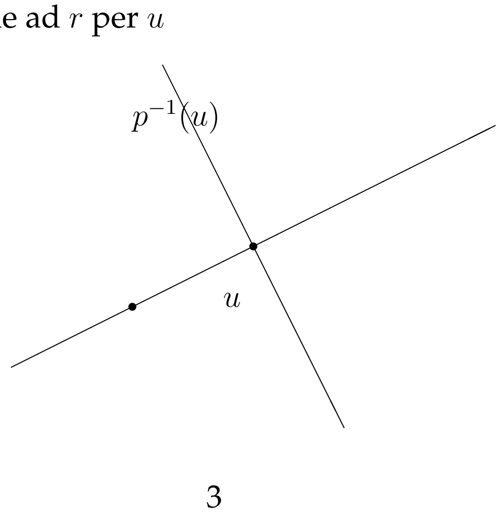
$$f^{-1}(b) = \{a \in A;\ f(a) = b\}.$$

Ad esempio, fissata una retta r in un piano $\mathfrak{P}$, consideriamo la seguente operazione. Dato un punto del piano si tracci la retta ortogonale ad r passante per il punto, e la si intersechi con r. Il punto ottenuto si dice "proiezione ortogonale su r del punto dato". La legge che associa ad ogni punto in $\mathfrak{P}$ la sua proiezione ortogonale su r e' una funzione, la funzione "proiezione ortogonale su r". Indicata con p questa funzione si ha dunque

$$p : \mathfrak{P} \to r; \qquad p(x) = \ \mathit{proiezione\ ortogonale\ di\ } x \mathit{\ su\ } r$$



Per ogni punto u della retta r, l'insieme preimmagine di u e' l'insieme dei punti di $\mathfrak{P}$ la cui proiezione ortogonale su r e' u, cioe' l'insieme dei punti della retta ortogonale ad r per u



2. Definiamo una funzione $f : \{1, \dots, 4\} \to \{1, \dots, 5\}$ definendo l'immagine di ogni elemento del dominio $\{1, \dots, 4\}$

   $f(1) = 2,\ f(2) = 4,\ f(3) = 1,\ f(4) = 2;$

   possiamo riassumere questi dati nella tabella

   $$\begin{array}{c|cccc} i & 1 & 2 & 3 & 4 \\ f(i) & 2 & 4 & 1 & 2 \end{array}.$$

   Gli insiemi preimmagine degli elementi del codominio $\{1, \dots, 5\}$ sono dati dalla tabella

   $$\begin{array}{l|lllll} i & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ f^{-1}(i) & \{3\} & \{1,4\} & \{\} & \{2\} & \{\} \end{array}.$$

   Ogni funzione $\{1, \dots, 4\} \to \{1, \dots, 5\}$ e' caratterizzata dalla serie delle immagini dei 4 elementi del suo dominio; l'immagine di ciascun elemento del dominio puo' essere uno qualsiasi dei 5 elementi del codominio; cosi' le possibili serie di immagini degli elementi del dominio sono $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^4$, e questo e' il numero delle funzioni $\{1, \dots, 4\} \to \{1, \dots, 5\}$.

   Allo stesso modo si vede che il numero delle funzioni $\{1, \dots, m\} \to \{1, \dots, n\}$ e' n^m.

3. **Funzioni Iniettive, Suriettive, Biiettive**

   Definizione 2

   Una funzione si dice iniettiva se ogni due elementi diversi nel dominio hanno immagini diverse;

   una funzione si dice suriettiva se ogni elemento del codominio ha almeno una preimmagine;

   una funzione si dice biiettiva se e' iniettiva e suriettiva.

   Osserviamo che una funzione e' iniettiva se e solo se ogni elemento del codominio ha al piu' una preimmagine.

   In altri termini, una funzione $f : A \to B$ e' iniettiva, suriettiva, biiettiva se e solo se per ogni $b \in B$ l'equazione

   $f(x) = b$

   nell'incognita $x \in A$ ha rispettivamente al piu' una soluzione, almeno una soluzione, esattamente una soluzione.

   Ad esempio, la funzione proiezione ortogonale $p : \mathfrak{P} \to r$ di un piano $\mathfrak{P}$ su una retta r e' suriettiva, ma non e' iniettiva. Se si restringe il dominio di p ad una retta s non perpendicolare a r, allora p diventa biiettiva. Se si restringe ulteriormente il dominio ad un segmento di s, allora p diventa iniettiva e non suriettiva.

   Per insiemi finiti A, B valgono i seguenti fatti.

- $\natural A \leq \natural B$ se e solo se esiste qualche funzione iniettiva $A \to B$;
- $\natural A = \natural B$ se e solo se esiste qualche biiezione $A \to B$;
- $\natural A \geq \natural B$ se e solo se esiste qualche funzione suriettiva $A \to B$.

Si ha inoltre che

- se $\natural A = \natural B$, allora ogni funzione iniettiva $A \to B$ e' anche suriettiva, e ogni funzione suriettiva $A \to B$ e' anche iniettiva.

Quest'ultimo fatto non vale per insiemi infiniti. Ad esempio, la funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definita da $f(n) = n + 1$ e' iniettiva ma non suriettiva.

4. Quante sono le funzioni iniettive fra due insiemi finiti?

   Siano A, B insiemi finiti, con $\natural A = m$ e $\natural B = n$. Indicati gli elementi di A con $a_1, a_2, \ldots, a_m$, possiamo costruire le funzioni iniettive da A a B nel modo seguente.

   - scegliamo l'immagine di a_1 fra gli n elementi di B;
   - scegliamo l'immagine di a_2 fra gli $n - 1$ elementi di B diversi dall'immagine di a_1;
   - scegliamo l'immagine di a_3 fra gli $n - 2$ elementi di B diversi dalle immagini di a_1, a_2;
   - ...
   - scegliamo l'immagine di a_m fra gli $n - (m - 1) = n - m + 1$ elementi di B diversi dalle immagini di $a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}$.

   Dunque se $\natural A = m$ e $\natural B = n$, il numero delle funzioni iniettive da A a B e'

   $$n(n - 1)(n - 2) \cdots (n - m + 1).$$

   Se $n < m$, allora fra i fattori compare 0, e dunque anche il prodotto e' 0; cio' concorda col fatto che in questo caso non ci sono funzioni iniettive.

   Supponiamo $n = m$. Da una parte, si ha che il numero delle funzioni iniettive da A a B e' $n(n - 1)(n - 2) \cdots 1$; questo numero viene detto n fattoriale e viene indicato con $n!$. Dall'altra, si ha che le funzioni iniettive da A a B sono esattamente le biiezioni da A a B.

   Dunque se $\natural A = \natural B = n$, il numero delle biiezioni da A a B e'

   $$n! = n(n - 1)(n - 2) \cdots 1.$$

5. **Prodotto cartesiano, grafico di una funzione.**

Siano A e B due insiemi. Il *prodotto cartesiano* di A per B, indicato con $A \times B$, e' l'insieme delle coppie ordinate, costituite da un primo elemento in A ed un secondo elemento in B :

$$A \times B = \{(a, b);\ a \in A,\ b \in B\}.$$

Ad esempio, se $A = \{1, \ldots, 4\}$ e $B = \{1, \ldots, 5\}$ allora $A \times B$ si puo' identificare con l'insieme dei punti del diagramma

$$\begin{array}{c|cccc}
5 & \circ & \circ & \circ & \circ \\
4 & \circ & \circ & \circ & \circ \\
3 & \circ & \bullet & \circ & \circ \\
2 & \circ & \circ & \circ & \circ \\
1 & \circ & \circ & \circ & \circ \\
\hline
 & 1 & 2 & 3 & 4
\end{array},$$

ad esempio la coppia $(2, 3)$ e' identificata col punto $\bullet$.

Definizione 3 *Sia $f : A \to B$ una funzione da un insieme A a un insieme B; il grafico di f e' il sottinsieme del prodotto cartesiano $A \times B$ costituito delle coppie ordinate nelle quali la seconda componente e' l'immagine per f della prima componente:*

$$grafico\ di\ f \ = \ \{(a, b) \in A \times B;\ b = f(a)\}.$$

Ad esempio, la funzione $f : \{1, \ldots, 4\} \to \{1, \ldots, 5\}$ definita dalla tabella

$$\begin{array}{r|cccc}
i & 1 & 2 & 3 & 4 \\
f(i) & 2 & 4 & 1 & 2
\end{array}$$

ha grafico costituito dalle coppie ordinate

$$(1, 2),\ (2, 4),\ (3, 1),\ (4, 2);$$

e puo' essere rappresentato col diagramma

$$\begin{array}{c|cccc}
5 & \circ & \circ & \circ & \circ \\
4 & \circ & \bullet & \circ & \circ \\
3 & \circ & \circ & \circ & \circ \\
2 & \bullet & \circ & \circ & \bullet \\
1 & \circ & \circ & \bullet & \circ \\
\hline
 & 1 & 2 & 3 & 4
\end{array}.$$

Nella descrizione data, i concetti di numero naturale, insieme finito, numero degli elementi di un insieme finito, sono assunti come primitivi; in realta' si possono definire in termini di insiemi e funzioni, ma questo esula dai nostri scopi.