Matematica I, 28.10.2012

Geometria analitica del piano. Rette, pendenza.

1. Fissati su una retta r un primo ed un secondo punto, diversi fra loro, l'identificazione del numero 0 con il primo punto e del numero 1 col secondo punto si estende in modo naturale ad una identificazione dei numeri reali con i punti della retta: ad ogni numero reale corrisponde un punto della retta, ed ogni punto della retta proviene da uno ed un solo numero reale.

   Si dice che i due punti formano un sistema di riferimento per la retta r, il primo punto si dice origine ed il secondo punto si dice punto unita'; il numero reale da cui proviene un punto si dice coordinata del punto.

2. Siano fissati nel piano: un punto O (origine), una prima retta (I asse) per O, ed una diversa seconda retta (II asse) per O; un punto sul I asse e un punto sul II asse, diversi da O. Solitamente, si fissa il II asse perpendicolare al I asse, e i due punti alla stessa distanza da O.

   Su ciascun asse, il punto O e il punto fissato costituiscono un sistema di riferimento.

   Data una coppia ordinata (a_1, a_2) di numeri reali, si ha che: a_1 si identifica con un punto A_1 del I asse, e a_2 si identifica con un punto A_2 del II asse; la retta per A_1 parallela al II asse e la retta per A_2 parallela al I asse si intersecano in un punto A del piano. Si ha cosi' una corrispondenza biunivoca fra l'insieme $\mathbb{R}^2$ delle coppie ordinate di numeri reali e l'insieme $\mathfrak{P}$ dei punti del piano: ad ogni coppia corrisponde un punto del piano, ed ogni punto del piano proviene da una ed una sola coppia.

   Si dice che l'origine, i due assi, e i punti fissati su essi costituiscono un sistema di riferimento per il piano $\mathfrak{P}$. Se alla coppia (a_1, a_2) corrisponde un punto A, allora si dice che A e' il punto di coordinate (a_1, a_2) nel sistema, e si scrive

   $$A(a_1, a_2).$$

   Solitamente, il I asse viene detto asse x, e il II asse viene detto asse y.

3. Alle coppie $(0, k)$ corrispondono punti sull'asse y, e tutti i punti sull'asse y provengono da tali coppie; dunque l'asse y ha equazione $x = 0$; piu' in generale, le rette parallele all'asse y hanno equazione

   $$x = h, \qquad (h \textit{ costante } \in \mathbb{R}.)$$

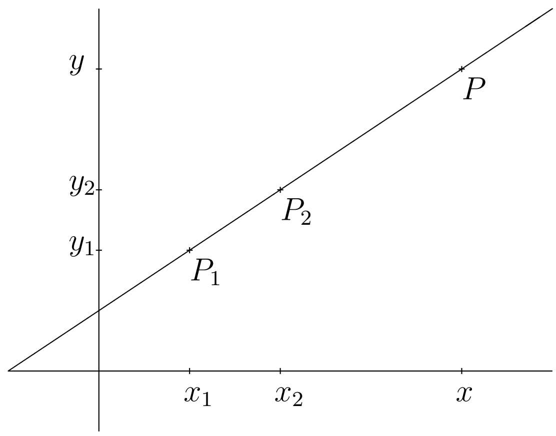
   Analogamente, l'asse x ha equazione $y = 0$; piu' in generale, le rette parallele all'asse x hanno equazione

   $$y = h, \qquad (h \textit{ costante } \in \mathbb{R}.)$$

Siano $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$ due punti diversi, che non stanno su una retta parallela all'asse y; la *pendenza del segmento* P_1P_2 e' il rapporto dell'incremento delle seconde coordinate sull'incremento delle prime coordinate:

$$\textit{pendenza di } P_1P_2 \;=\; \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Sia r una retta non parallela all'asse y; la *pendenza della retta* r e' la pendenza di un qualsiasi segmento con estremi su r. In effetti tutti i segmenti con estremi su una stessa retta hanno la stessa pendenza, e questa proprieta' caratterizza le rette fra le altre curve.



Siano $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$ due punti diversi, che non stanno su una retta parallela all'asse y, e sia r la retta passante per P_1 e P_2. Un punto $P(x, y)$ diverso da P_1 appartiene alla retta r se e solo se

$$\textit{pendenza di } P_1P \;=\; \textit{pendenza di } P_1P_2,$$

cioe'

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Da cio' segue che l'equazione della retta r per i due punti P_1 e P_2 e'

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1).$$

L'equazione della retta di pendenza m per un punto $P_0(x_0, y_0)$ e'

$$y - y_0 = m(x - x_0);$$

esplicitando la y, e mettendo assieme le costanti, si ottiene un'equazione del tipo

$$y = mx + q.$$

Questa e' l'equazione canonica della retta; ad essa corrisponde la retta di pendenza m passante per $(0, q)$.

Esercizio Si traccino le rette per il punto $(1, 2)$ aventi pendenza $m = 0, \pm 1, \pm 2, \frac{1}{2}$, e si scrivano le equazioni di queste rette per $m = 1, -2, \frac{1}{2}$.

Funzioni reali di variabile reale. Funzioni crescenti, decrescenti. Funzioni elementari (I).

1. Sia $f : A \subseteq \mathbb{R} \to B \subseteq \mathbb{R}$ una funzione reale di variabile reale; il grafico di f e'

   $$\{(x, y) \in A \times B;\ y = f(x)\};$$

   si tratta di una linea nel piano, avente equazione $y = f(x)$.

   Una linea $\mathfrak{l}$ nel piano e' il grafico di una funzione se e solo se ogni retta parallela all'asse y incontra $\mathfrak{l}$ in al piu' un punto; in tal caso il dominio della funzione e' l'insieme dei punti $h \in \mathbb{R}$ tali che la retta $x = h$ incontra $\mathfrak{l}$ in esattamente un punto P_h, per ciascuno di questi punti h, l'immagine di h e' la seconda coordinata di P_h, e il codominio della funzione e' un qualsiasi insieme contenente tutte queste immagini.

   Una retta parallela all'asse y non e' il grafico di alcuna funzione.

2. Nel seguito considereremo alcuni semplici tipi di funzioni, combinando queste funzioni con le operazioni algebriche ed altre operazioni, si ottiene la gran parte delle funzioni che compaiono nella teoria e nella pratica di base.

   Una delle caratteristiche delle funzioni alla quale saremo maggiormente interessati e' descritta dalla seguente

   Definizione 1 *Siano $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, e $C \subseteq A$.*
   Si dice che f e' crescente su C se
   $$\forall x_1, x_2 \in C, \qquad x_1 \leq x_2 \quad \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2);$$
   si dice che f e' strettamente crescente su C se
   $$\forall x_1, x_2 \in C, \qquad x_1 < x_2 \quad \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$
   Si dice che f e' decrescente su C se
   $$\forall x_1, x_2 \in C, \qquad x_1 \leq x_2 \quad \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2);$$
   si dice che f e' strettamente decrescente su C se
   $$\forall x_1, x_2 \in C, \qquad x_1 < x_2 \quad \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

3. Consideriamo un polinomio di grado 1, o 0, in x; in altri termini, consideriamo una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da una legge del tipo

   $$f(x) = mx + q, \qquad (m, q \textit{ costanti in } \mathbb{R}).$$

   Il grafico di questa funzione e' la linea di equazione

   $$y = mx + q,$$

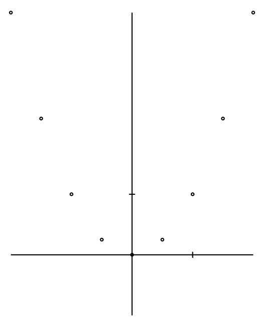
   cioe' la retta di pendenza m per il punto $(0, q)$.

   Si ha che

f e′	str. crescente	per	$m > 0$;
f e′	costante	per	$m = 0$;
f e′	str. decrescente	per	$m < 0$.

4. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$.

   Nella figura seguente sono riportati i punti del grafico di f che corrispondono ai valori $x = 0, \pm\frac{1}{2}, \pm 1, \pm\frac{3}{2}, \pm 2$.

   La funzione f e′ strettamente decrescente sull′intervallo $]-\infty, 0]$, ed e′ strettamente crescente sull′intervallo $[0, +\infty[$.

   Proviamo che f e′ strettamente crescente sull′intervallo $[0, +\infty[$, cioe′ che

   $$\forall x_1, x_2 \in [0, +\infty[, \qquad x_1 < x_2 \quad \Rightarrow x_1^2 < x_2^2.$$

   Per $x_1 = 0$ si ha $x_1^2 = 0 < x_2^2$; sia $x_1 \neq 0$.

   Moltiplicando entrambe i membri della disuguaglianza $x_1 < x_2$ per x_1, che e′ > 0, otteniamo $x_1^2 < x_1 x_2$;

   moltiplicando entrambe i membri della disuguaglianza $x_1 < x_2$ per x_1, che e′ > 0, otteniamo $x_1 x_2 < x_2^2$;

   da queste due disuguaglianze, per la transitivita′ della relazione d′ordine otteniamo $x_1^2 < x_2^2$.

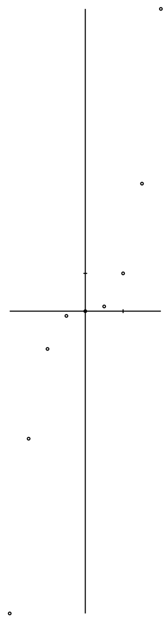
   Esercizio Si provi che f e′ strettamente decrescente su $]-\infty, 0]$.

   Piu′ in generale sui ha che

   > *Ciascuna funzione potenza ad esponente naturale pari e′ strettamente decrescente su* $]-\infty, 0]$, *ed e′ strettamente crescente su* $[0, +\infty[$.

5. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x) = x^3$, $x \in \mathbb{R}$.

   Nella figura seguente sono riportati i punti del grafico di f che corrispondono ai valori $x = 0, \pm\frac{1}{2}, \pm 1, \pm\frac{3}{2}, \pm 2$.



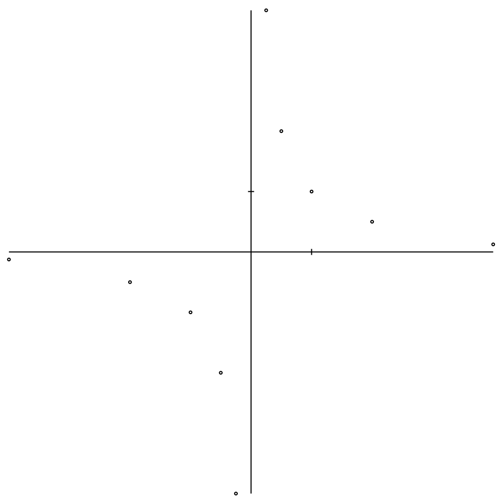
Esercizio Si provi che f e' strettamente crescente su $\mathbb{R}$.

Piu' in generale sui ha che

> *Ciascuna funzione potenza ad esponente naturale dispari e' strettamente crescente su* $\mathbb{R}$.

6. Sia $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $A =]-\infty, 0[\smile]0, +\infty[$, $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in A$.

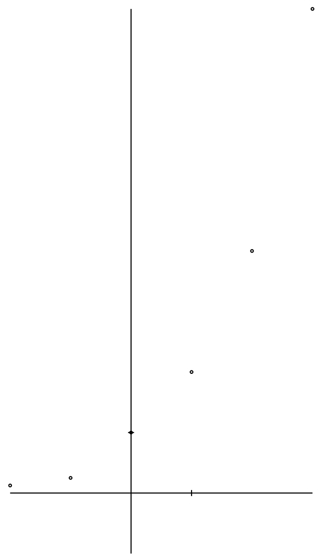
   Nella figura seguente sono riportati alcuni punti del grafico di f.



Esercizio Si provi che f e' strettamente decrescente su $]-\infty, 0[$ e su $]0, +\infty[$. E' decrescente su $]-\infty, 0[\smile]0, +\infty[$?

7. Sia $\exp_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $exp_2(x) = 2^x$, la funzione esponenziale in base 2.

   Nella figura seguente sono riportati alcuni punti del grafico di f.



La funzione esponenziale $\exp_2$ e′ strettamente crescente su $\mathbb{R}$; e′ facile riconoscere che $\exp_2$ e′ strettamente crescente su $\mathbb{Z}$, piu′ complesso (e fuori dagli scopi di questa lezione) e′ provare che $\exp_2$ e′ strettamente crescente su $\mathbb{R}$;

Piu′ in generale si ha che

> *Ciascuna funzione esponenziale* $\exp_b$ *in base* $b > 1$ *e′ strettamente crescente su* $\mathbb{R}$.

Esercizio Si svolga l'analoga analisi per la funzione esponenziale in base $\frac{1}{2}$.

Funzione inversa.

1. Sia f una funzione biunivoca da un insieme A ad un insieme B. Si ha che ogni $b \in B$ ha una ed una sola preimmagine in A. Associando ad ogni $b \in B$ la sua unica preimmmagine in A si ha una funzione da B ad A. Questa funzione viene detta *funzione inversa di f*, e viene indicata con f^{-1}.

   In altri termini, ciascuna funzione biunivoca $f : A \to B$ possiede una funzione inversa $f^{-1} : B \to A$, definita da

   $$f^{-1}(b) = a \qquad \Leftrightarrow \qquad f(a) = b.$$

   Se la funzione f non fosse biunivoca, queste condizioni non definirebbero alcuna funzione.

2. Ad esempio, sia $A = \{1, 2, 3\}$, e sia $f : A \to A$ la funzione definita dalla tabella

$$\begin{array}{r|ccc} i & 1 & 2 & 3 \\ f(i) & 2 & 3 & 1 \end{array}.$$

Ciascuno degli elementi $1, 2, 3$ di A ha una ed una sola preimmagine: $3, 1, 2$, rispettivamente.

f ha funzione inversa $f^{-1} : A \to A$ definita dalla tabella

$$\begin{array}{r|ccc} i & 1 & 2 & 3 \\ f^{-1}(i) & 3 & 1 & 2 \end{array}.$$

I grafici della funzione f e della funzione f^{-1} sono

$$\begin{array}{c|ccc} 3 & \circ & \bullet & \circ \\ 2 & \bullet & \circ & \circ \\ 1 & \circ & \circ & \bullet \\ \hline & 1 & 2 & 3 \end{array} \qquad\qquad f^{-1} \quad \begin{array}{c|ccc} 3 & \bullet & \circ & \circ \\ 2 & \circ & \circ & \bullet \\ 1 & \circ & \bullet & \circ \\ \hline & 1 & 2 & 3 \end{array}.$$

Si noti che sono simmetrici rispetto alla diagonale ascendente.

3. Cio′ che si e′ osservato al punto precedente non e′ un caso.

   Se $f : A \to B$ e′ una funzione biunivoca da un insieme A ad un insieme B ed $f^{-1} : B \to A$ e′ la sua funzione inversa, allora

   $$(a, b) \in (grafico\ di\ f) \;\Leftrightarrow\; (b, a) \in (grafico\ di\ f^{-1}),$$

   per ogni $(a, b) \in A \times B$. Infatti:

   $$\begin{aligned} &(a, b) \in (grafico\ di\ f) \;\Leftrightarrow\; b = f(a) \;\Leftrightarrow \\ &\qquad\qquad \Leftrightarrow\; a = f^{-1}(b) \;\Leftrightarrow\; (b, a) \in (grafico\ di\ f^{-1}). \end{aligned}$$