Matematica I, 02.10.2012

Funzione inversa. Funzioni elementari (II).

1. Sia $f : A \to B$ una funzione reale di variabile reale ($A, B \subseteq \mathbb{R}$); se f e' biiettiva, allora la posizione

   $$f^{-1}(b) = \textit{ unico elemento } a \in A \textit{ tale che } f(a) = b$$

   definisce una funzione $f^{-1} : B \to A$. La funzione f^{-1} e' l'inversa della funzione f.

   Il grafico di f ed il grafico di f^{-1} sono legati dalla relazione

   $$(b, a) \in (grafico\ di\ f^{-1}) \Leftrightarrow (a, b) \in (grafico\ di\ f),$$

   dunque simmetrici rispetto alla retta $y = x$.

2. Consideriamo il polinomio di primo grado

   $$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = 2x + 2.$$

   Per ciascun $b \in \mathbb{R}$, consideriamo l'equazione

   $$f(a) = b, \qquad cioe' \qquad 2a + 2 = b$$

   nell'incognita $a \in \mathbb{R}$; questa equazione ha una ed una sola soluzione, data da

   $$a = \frac{1}{2}b - 1.$$

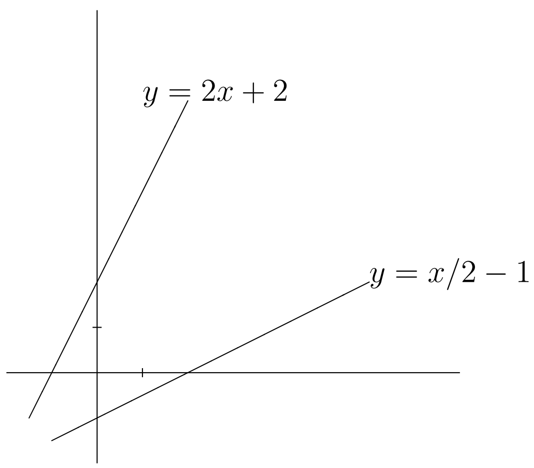
   Quindi f e' biiettiva, e

   $$f^{-1} : R \to R, \qquad f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x - 1$$

   I grafici di f e di f^{-1} sono le rette

   $$y = 2x + 2, \qquad\qquad y = \frac{1}{2}x - 1,$$

   che sono simmetriche rispetto alla retta $y = x$, come previsto.



Analogamente si trova che una funzione della forma

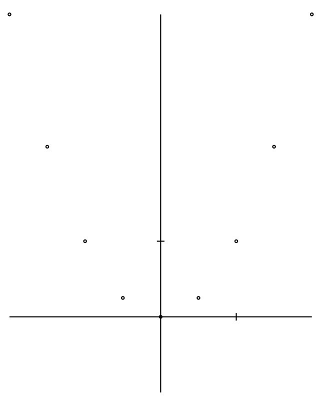
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = mx + q, \qquad (m \neq 0),$$

cioe' un polinomio di primo grado, e' biiettiva, e

$$f^{-1} : R \to R, \qquad f^{-1}(x) = \frac{1}{m}x - \frac{q}{m}.$$

3. Consideriamo la funzione "elevamento al quadrato" dai reali verso i reali

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = x^2.$$



Per ciascun $b \in \mathbb{R}$, consideriamo l'equazione

$$f(a) = b, \qquad cioe' \qquad a^2 = b$$

nell'incognita $a \in \mathbb{R}$; per $b > 0$ questa equazione ha due soluzioni, per $b = 0$ ne ha una, e per $b < 0$ nessuna. La funzione f non e' biiettiva, dunque non ha inversa.

Consideriamo ora la funzione f "elevamento al quadrato" con dominio e codominio ristretti

$$f : [0, +\infty[\to [0, +\infty[, \qquad f(x) = x^2.$$

Per ciascun $b \in [0, +\infty[$, l'equazione

$$a^2 = b$$

nell'incognita $a \in [0, +\infty[$ ha una ed una sola soluzione, la radice di b :

$$a = \sqrt{b}.$$

Quindi la funzione f "elevamento al quadrato" ora e' biiettiva, e la sua inversa f^{-1} e' la funzione "radice quadrata"

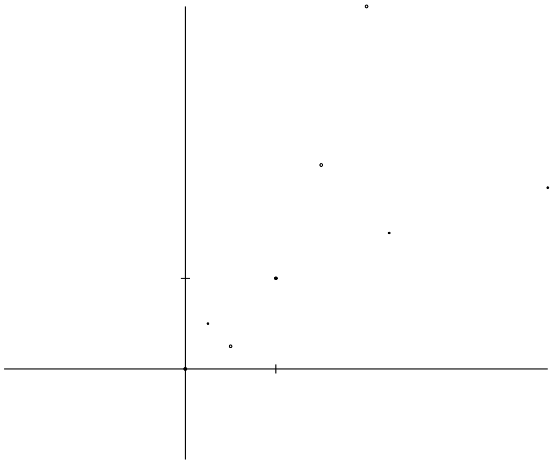
$$f^{-1} : [0, +\infty[\to [0, +\infty[, \qquad f^{-1}(x) = \sqrt{x}.$$

I grafici di f e di f^{-1} sono rispettivamente le curve

$$y = x^2, \quad (x \in [0, +\infty[) \qquad\qquad y = \sqrt{x}, \quad (x \in [0, +\infty[)$$

che sono simmetriche rispetto alla retta $y = x$.

Nella figura seguente sono riportati con "$\circ$" alcuni punti del grafico di x^2 e con "$\bullet$" i punti corrispondenti del grafico di $\sqrt{x}$.



I fatti qui stabiliti valgono, con i dovuti cambiamenti, per le funzioni "elevamento alla n" e "radice $n-$ma" ($n \in \mathbb{N}$).

4. Consideriamo la funzione "esponenziale in base 2" dai reali verso i reali

   $$\exp_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad \exp_2(x) = 2^x.$$

   Per ciascun $b \in \mathbb{R}$, consideriamo l'equazione

   $$2^a = b$$

   nell'incognita $a \in \mathbb{R}$; per $b > 0$ questa equazione ha una soluzione, e per $b \leq 0$ nessuna. La funzione $\exp_2$ non ha inversa.

   Consideriamo ora la funzione $\exp_2$ "esponenziale in base 2" con codominio ristretto

   $$\exp_2 : \mathbb{R} \to]0, +\infty[, \qquad \exp_2(x) = 2^x.$$

   Per ciascun $b \in]0, +\infty[$, l'equazione

   $$2^a = b$$

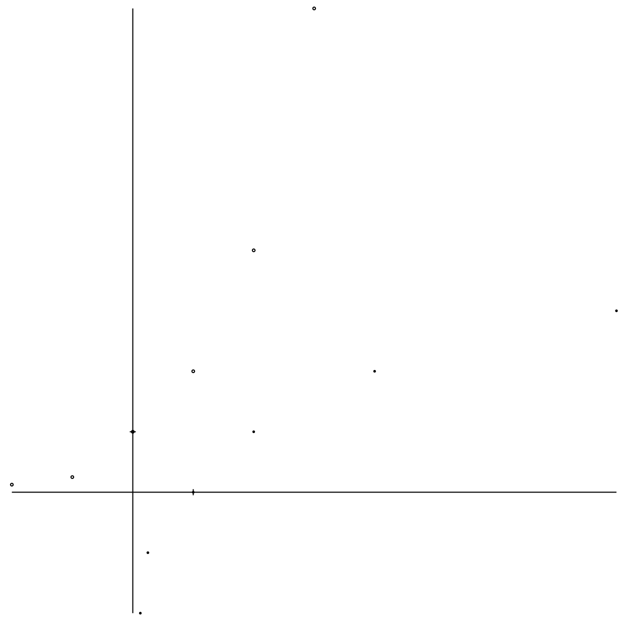
   nell'incognita $a \in \mathbb{R}$ ha una ed una sola soluzione, il logaritmo in base 2 di b :

   $$a = \log_2 b.$$

   Quindi la funzione "esponenziale in base 2" ora e' biiettiva, e la sua inversa e' la funzione "logaritmo in base 2"

   $$\log_2 : [0, +\infty[\to \mathbb{R}.$$

   Nella figura seguente sono riportati con "$\circ$" alcuni punti del grafico di $\exp_2$ e con "$\bullet$" i punti corrispondenti del grafico di $\log_2$.



I fatti qui stabiliti valgono tali e quali per le funzioni esponenziale e logaritmo, in una qualsiasi base ammissibile.

5. **Composizione di funzioni**

Definizione 1 *Siano $f : A \to B$ e $g : C \to D$ due funzioni fra insiemi, tali che $B \subseteq C$. Associando a ciascun elemento di A la sua immagine per f in B, ed associando a questo elemento di B la sua immagine per g in D, si ottiene una funzione da A a D, detta funzione composta di g dopo f, ed indicata con $g \circ f$. Cosi'*

$$(g \circ f)(a) = g(f(a)), \qquad \forall a \in A.$$

Se $f_1 : A_1 \to B_1$, $f_2 : A_2 \to B_2$, $f_3 : A_3 \to B_3$ sono funzioni fra insiemi, tali che $B_1 \subseteq A_2$, $B_2 \subseteq A_3$, allora si ha che

$$(f_3 \circ f_2) \circ f_1 = f_3 \circ (f_2 \circ f_1),$$

cioe' l'operazione di composizione e' associativa.

Un esempio di composizione di funzioni. Siano

$$f : \mathbb{R} \to]0,1[, \qquad f(x) = 1/(x^2+1)$$

$$g : \mathbb{R} \to]0,+\infty[, \qquad g(x) = e^x$$

Si ha

$$g \circ f : \mathbb{R} \to]0,+\infty[, \qquad (g \circ f)(x) = g(f(x)) = e^{1/(x^2+1)},$$

$$f \circ g : \mathbb{R} \to]0,1[, \qquad (f \circ g)(x) = f(g(x)) = 1/((e^x)^2+1).$$

Un esempio di scomposizione di funzioni. La funzione

$$f : x \mapsto \log(\sqrt{x+1}+2), \qquad x \geq -1$$

si puo' ottenere come composizione delle funzioni

$$p : x \mapsto x + 1$$
$$q : x \mapsto \sqrt{x}$$
$$r : x \mapsto x + 2$$
$$s : x \mapsto \log x,$$

cioe'

$$f = s \circ r \circ q \circ p.$$

6. **Funzione identita', funzione inversa**

   Per ogni insieme A, la funzione $A \to A$ definita da $a \mapsto a$ per ogni $a \in A$ viene detta funzione identita' su A, e viene denotata con id_A.

   Per ogni funzione $f : A \to B$, si ha

   $$f \circ id_A = f, \qquad id_B \circ f = f.$$

   L'inversa di una funzione $f : A \to B$, quando esiste, e' la funzione $f^{-1} : B \to A$ caratterizzata dalle condizioni

   $$f^{-1} \circ f = id_A, \qquad f \circ f^{-1} = id_B.$$

   Qualche esempio.

   Per A intervallo in $\mathbb{R}$, la funzione identita' $id_A : A \to A$ e' data da $id_A(x) = x$, per ogni $x \in A$; il grafico di $id_A(x) = x$ e' dato da $y = x$ per $x \in A$, un intervallo sulla bisettrice del I e III quadrante.

   La funzione radice quadrata $[0, +\infty[\to [0, +\infty[$, $x \mapsto \sqrt{x}$, l'inversa della funzione elevamento al quadrato $[0, +\infty[\to [0, +\infty[$, $x \mapsto \sqrt{x}$, e' caratterizzata dalle condizioni

   $$\sqrt{x^2} = x, \qquad (x \in [0, +\infty[), \qquad (\sqrt{x})^2 = x, \qquad (x \in [0, +\infty[).$$

   La funzione logaritmo $[0, +\infty[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto \log x$, l'inversa della funzione esponenziale $\mathbb{R} \to [0, +\infty[$, $x \mapsto \exp x = e^x$, e' caratterizzata dalle condizioni

   $$\log(e^x) = x, \qquad (x \in \mathbb{R}), \qquad e^{\log x} = x, \qquad (x \in [0, +\infty[).$$

7. **Funzione inversa, Equazioni.**

   Siano $f : A \to B$ e $f^{-1} : B \to A$ una funzione biiettiva e la sua inversa. Dalla caratterizzazione delle funzioni inverse segue che

   $$a_1 = a_2 \quad \Leftrightarrow \quad f(a_1) = f(a_2), \qquad (a_1, a_2 \in A),$$
   $$b_1 = b_2 \quad \Leftrightarrow \quad f^{-1}(b_1) = f^{-1}(b_2), \qquad (b_1, b_2 \in B).$$

   Applicazione alle equazioni.

   Consideriamo l'equazione

   $$e^x = 2, \qquad (x \in \mathbb{R});$$

   questa equazione ha una ed una sola soluzione, che per definizione e' $\log 2$; possiamo ottenere la soluzione anche cosi'

$e^x = 2 \quad \Leftrightarrow \quad \log(e^x) = \log 2, \quad cioe' \quad x = \log 2.$

Consideriamo l'equazione

$e^{x^2} = 3^x, \qquad (x \in \mathbb{R});$

si ha

$e^{x^2} = 3^x \quad \Leftrightarrow \quad \log(e^{x^2}) = \log(3^x), \quad cioe' \quad x^2 = x\log 3;$

$x^2 - x\log 3 = 0, \quad x_1 = 0,\ x_2 = \log 3.$

Consideriamo l'equazione

$\log(x^2+1) = 2, \qquad (x \in \mathbb{R});$

osservato che $x^2 + 1 \in]0, +\infty[$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, si ha

$\log(x^2+1) = 2 \quad \Leftrightarrow \quad e^{\log(x^2+1)} = e^2, \quad cioe' \quad x^2 + 1 = e^2;$

$x^2 = e^2 - 1, \quad x_{12} = \pm\sqrt{e^2-1}.$

8. **Funzione inversa, Funzioni crescenti, e Disequazioni.**

Siano $f : A \to B$ e $f^{-1} : B \to A$ una funzione biiettiva e la sua inversa, dove A e B sono due insiemi totalmente ordinati.

Supponiamo che f sia strettamente crescente su A; allora anche f^{-1} e' strettamente crescente su B. Infatti: dati b_1 e $b_2 \in B$ con $b_1 < b_2$, consideriamo $f^{-1}(b_1)$ e $f^{-1}(b_2)$ in A; si ha una ed una sola delle tre eventualita': $f^{-1}(b_1) < f^{-1}(b_2)$ o $f^{-1}(b_1) = f^{-1}(b_2)$ o $f^{-1}(b_1) > f^{-1}(b_2)$; solo la prima eventualita' e' compatibile col fatto che f e' crescente.

Da cio' e dalla caratterizzazione delle funzioni inverse segue che

$$a_1 < a_2 \quad \Leftrightarrow \quad f(a_1) < f(a_2), \qquad (a_1, a_2 \in A),$$
$$b_1 < b_2 \quad \Leftrightarrow \quad f^{-1}(b_1) < f^{-1}(b_2), \qquad (b_1, b_2 \in B).$$

Applicazione alle disequazioni.

Consideriamo la disequazione

$e^x < 2, \qquad (x \in \mathbb{R});$

possiamo ottenere la soluzione cosi'

$e^x < 2 \quad \Leftrightarrow \quad \log(e^x) < \log 2, \quad cioe' \quad x < \log 2.$

Consideriamo la disequazione

$e^{x^2} < 3^x, \qquad (x \in \mathbb{R});$

si ha

$e^{x^2} < 3^x \quad \Leftrightarrow \quad \log(e^{x^2}) < \log(3^x), \quad cioe' \quad x^2 < x\log 3;$

$x^2 - x\log 3 < 0, \quad x \in]0, \log 3[.$

Consideriamo la disequazione

$\log(x^2+1) < 2, \qquad (x \in \mathbb{R});$

osservato che $x^2 + 1 \in]0, +\infty[$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, si ha

$$\log(x^2+1) < 2 \quad \Leftrightarrow \quad e^{\log(x^2+1)} < e^2, \quad cioe' \quad x^2+1 < e^2;$$

$$x^2 < e^2 - 1, \quad x \in]-\sqrt{e^2-1}, +\sqrt{e^2-1}[.$$