**Matematica I, 03.10.2012**

**Limiti.**

1. Il concetto di limite ha una lunga storia. Qualche riferimento:

   Archimede (III secolo AC; misure di lunghezze, aree, volumi)
   Newton, Leibniz (XVII secolo; cinematica, meccanica.)
   Cauchy (IXX secolo; definizione)

   Il concetto di limite e′ essenziale per definire i concetti fondamentali del calcolo infintesimale: derivata e integrale.

2. **Successioni, Limiti.**

   **Definizione 1** *Una successione di numeri reali e′ una legge che associa un numero reale $a_n$ a ogni numero naturale $n = 0, 1, 2, \ldots,$ - in breve: e′ una funzione $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$; si scrive nella forma*

   $$\{a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$$

   *o $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, o anche $\{a_n\}$; per brevita′, a volte si omettono le parentesi.*

   Talvolta una successione si presenta dando qualche termine e facendo intuire i seguenti.

   Si e′ interessati al comportamento dei termini $a_n$ della successione per valori di $n$ ″grandi″; dunque $a_n$ potrebbe senza danno essere definito solo per $n$ maggiore-uguale ad un certo naturale.

   **Esempi**

   - la successione $a_n$, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots,$ data da
     $0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots,$
     cioe′
     $$a_n = \frac{n}{n+1}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots;$$
     viene da dire che $a_n$ tende a $1$ per $n$ che tende a $+\infty$.
   - la successione $b_n$, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots,$ data da
     $1, 2, 4, 8, \ldots$
     cioe′
     $$b_n = 2^n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots;$$
     viene da dire che $b_n$ tende a $+\infty$ per $n$ che tende a $+\infty$.

- la successione $c_n$, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$, data da

  $1, -1, 1, -1, 1, \ldots$

  cioe'

  $$c_n = (-1)^n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots;$$

  non viene da dire niente.

**Definizione 2** *Diciamo che una successione $\{a_n\}$ possiede definitivamente una proprieta' se esiste un $N \in \mathbb{N}$ tale che $a_n$ possiede la proprieta' per ogni $n > N$.*

**Esempi.**

La successione

$$d_n = 2n - 100, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

e' definitivamente positiva, in quanto $d_n > 0$ per ogni $n > 50$;

La successione

$$e_n = \ parte\ intera\ di\ \tfrac{100}{n}, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

e' definitivamente nulla, in quanto $e_n = 0$ per ogni $n > 100$.

**Definizione 3** *Siano $\{a_n\}$ una successione reale e $l \in \mathbb{R}$ un numero reale. Si dice che $a_n$ tende al limite $l$ per $n$ che tende a $+\infty$ se per ogni $\varepsilon > 0$ la distanza fra $a_n$ ed $l$ e' definitivamente $< \varepsilon$ :*

$$|a_n - l| < \varepsilon, \quad definitivamente.$$

*In tal caso dice che la succesione e' convergente e si scrive*

$$a_n \to l \quad per \quad n \to +\infty;$$

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = l.$$

Esplicitamente, la condizione e': per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $N \in \mathbb{N}$ tale che

$$|a_n - l| < \varepsilon, \quad \forall n > N.$$

**Definizione 4** *Sia $\{a_n\}$ una successione di numeri reali.*

*Si dice che $\{a_n\}$ tende al limite $+\infty$ per $n$ che tende $+\infty$ se $\forall M > 0$ si ha*

$$a_n > M, \quad definitivamente.$$

*In tal caso dice che $\{a_n\}$ e' divergente e si scrive*

$$a_n \to +\infty \quad per \quad n \to +\infty,$$

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty.$$

*Si dice che $\{a_n\}$ tende al limite $-\infty$ per $n$ che tende $+\infty$ se $\forall M > 0$ si ha*

$$a_n < -M, \quad definitivamente.$$

*In tal caso dice che $\{a_n\}$ e' divergente e si scrive*

$$a_n \to -\infty \quad per \quad n \to +\infty,$$

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty.$$

Esplicitamente, la condizione che caratterizza la divergenza a $+\infty$ e': per ogni $M > 0$ esiste un $N \in \mathbb{N}$ tale che

$$a_n > M, \quad \forall n > N.$$

3. Verifichiamo che la successione

$$a_n = \frac{n}{n+1}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

tende a 1 per $n \to +\infty$.

Dobbiamo provare che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $N \in \mathbb{N}$ tale che

$$\left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| < \varepsilon, \qquad \forall n > N.$$

Questa disuguaglianza si puo' riscrivere nella forma

$$1 - \varepsilon < \frac{n}{n+1} < 1 + \varepsilon;$$

la disuguaglianza di destra e' sempre soddisfatta, per il fatto che $a_n$ e' sempre $\leq 1$; la disuguaglianza di sinistra si puo' risolvere come segue

$$1 - \varepsilon < \frac{n}{n+1} \qquad (1-\varepsilon)(n+1) < n \qquad 1 - \varepsilon < \varepsilon n \qquad n > \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$$

basta allora prendere

$$N = N(\varepsilon) = \textit{ primo intero maggiore di } \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}.$$

Osservazione.

Abbiamo provato che per ogni $\varepsilon > 0$ si ha

$$|a_n - 1| < \varepsilon, \qquad \forall n > N(\varepsilon).$$

Cio' significa in particolare che: i termini $a_n$ della successione distano da 1 meno di 0.1, per ogni $n > N(0.1) = 9$; i termini $a_n$ distano da 1 meno di 0.01, per ogni $n > N(0.01) = 99$; ...

4. Verifichiamo che la successione

$$b_n = 2^n, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

tende a $+\infty$ per $n \to +\infty$.

Dobbiamo provare che per ogni $M > 0$ esiste un $N \in \mathbb{N}$ tale che

$$2^n > M, \qquad \forall n > N.$$

Questa disuguaglianza si ha soluzine

$$n > \log_2 M$$

basta allora prendere

$$N = N(M) = \textit{ primo intero maggiore di } \log_2 M.$$

5. Verifichiamo che la successione

$$c_n = (-1)^n, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

non tende a 1 per $n \to +\infty$.

Per ogni $\varepsilon > 0$ consideriamo la disequazione

$$|(-1)^n - 1| < \varepsilon;$$

per $\varepsilon > 2$ questa disequazione e' soddisfatta da ogni $n \in \mathbb{N}$, per $\varepsilon \leq 2$ questa disequazione e' soddisfatta solo dagli $n$ pari.

Ora, per $\varepsilon = 1$ si ha che non esiste alcun $N \ \in \mathbb{N}$ tale che

$$|(-1)^n - 1| < 1, \qquad \forall n > N.$$

Infatti, comunque sia preso $N$, esiste un $n$ dispari $> N$, e per tale $n$ si ha

$$|(-1)^n - 1| = 2 > 1.$$

6. **Successioni crescenti**

**Definizione 5** *Diciamo che una successione $\{a_n\}$ e' crescente se*

$$\forall n_1, n_2 \in \mathbb{N}, \qquad n_1 < n_2 \ \Rightarrow a_{n_1} \leq a_{n_2},$$

*equivalentemente, se*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad a_n \leq a_{n+1};$$

*diciamo che $\{a_n\}$ e' strettamente crescente se queste condizioni valgono col $\leq$ sostiyuito dal $<$ .*

*Analogamente si definiscono le successioni decrescenti e strettamente decrescenti.*

Qualche esempio.

- La successione $a_n = n/(n+1)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, e' strettamente crescente. Infattti
$$n/(n+1) < (n+1)/(n+2) \quad \Leftrightarrow \quad n(n+2) < (n+1)^2 \quad \Leftrightarrow \quad 0 < 1;$$
cioe' $a_n < a_{n+1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.
- La successione $(-1)^n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, non e' crescente e non e' decrescente.

**Definizione 6** *Diciamo che una successione $\{a_n\}$ e' superiormente limitata se esiste un $M > 0$ tale che*

$$a_n < M, \qquad \forall n \in \mathbb{N};$$

*Analogamente si definiscono le succesioni inferiormente limitate. Una successione si dice limitata se e' superiormente e inferiormente limitata.*

Qualche esempio.

- La successione $a_n = n/(n+1)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, e' limitata. Infattti $0 \leq a_n < 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.
- La successione $b_n = 2^n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, e' inferiormente limitata e superiormente illimitata.

- La successione $c_n = (-1)^n$, $n = 0, 1, 2, \dots$, e' limitata.

**Teorema 1** *Sia $\{a_n\}$ una successione crescente;*
*se $\{a_n\}$ e' limitata, allora e' convergente e*

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n;$$

*se $\{a_n\}$ e' illimitata, allora e' divergente:*

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty.$$

*Vale un analogo risultato per le successioni decrescenti.*

**Dimostrazione** Sia $\{a_n\}$ una successione crescente e limitata. Sia $l = \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n$; chiaramente $a_n \leq l$, per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Dato $\varepsilon > 0$, si ha: $l - \varepsilon < l$, dunque $l - \varepsilon$ non e' un maggiorante di $\{a_n\}$; cio' significa che c'e' un $N \in \mathbb{N}$ tale che $1 - \varepsilon < a_N$; per l'ipotesi $\{a_n\}$ crescente si ha $a_N < a_n$ per ogni $n > N$; per la transitivita' della relazione d'ordine si ha $l - \varepsilon < a_n$ per ogni $n > N$. Infine si ha

$$l - \varepsilon < a_n \leq l, \qquad \forall n > N.$$

Il caso di una successione crescente illimitata e' analogo. □