Matematica I, 05.10.2012

Limiti di successioni (II).

1. Le successioni elementari, cioe'

   $n^\alpha, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \qquad (\alpha \in \mathbb{R}),$

   $b^n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \qquad (b \in \mathbb{R}),$

   $\log_b n, \quad n = 1, 2, \ldots \qquad (b > 0, \ b \neq 1),$

   $\sin n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$

   $\cos n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$

   per $n \to +\infty$ hanno il seguente comportamento

   $$n^\alpha \ \to \begin{cases} +\infty & \alpha > 0 \\ 1 & \alpha = 0 \\ 0 & \alpha < 0 \end{cases}$$

   $$b^n \ \to \begin{cases} +\infty & b > 1 \\ 1 & b = 1 \\ 0 & |b| < 1 \end{cases}$$

   $per\ b = -1,\ b^n\ non\ converge\ ad\ alcun\ limite;\ e'\ limitata;$

   $per\ b < -1,\ b^n\ non\ converge\ ad\ alcun\ limite;\ e'\ illimitata;$

   $$\log_b n \ \to \begin{cases} +\infty & b > 1 \\ -\infty & 0 < b < 1 \end{cases}$$

   $\sin n\ non\ converge\ ad\ alcun\ limite,\ e'\ limitata;$

   $\cos n\ non\ converge\ ad\ alcun\ limite,\ e'\ limitata.$

   Questi fatti si possono riconoscere come plausibili, considerando il grafico delle corrispondenti funzioni elementari; quasi tutti si possono anche dimostrare facilmente.

   Esercizio Si dimostri che le successioni esponenziali si comportano nel modo sopra descritto.

2. La definizione di limite, che da' significato alla frase "una successione $\{a_n\}$ tende ad un limite l per n che tende a $+\infty$" si puo' riesprimere cosi': per ogni $\varepsilon > 0$, i termini a_n della successione appartengono definitivamente all'intorno di centro l e raggio ε :

   $\forall \varepsilon > 0, \qquad a_n \in]l - \varepsilon, l + \varepsilon[, \qquad definitivamente.$

3. Nello studio dei limiti, spesso si rivela utile il seguente

   Teorema 1 (dei due carabinieri). *Siano $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ tre successioni tali che $a_n \leq b_n \leq c_n$, definitivamente. Se $\{a_n\}$ e $\{c_n\}$ convergono ad uno stesso limite l, alllora anche $\{b_n\}$ converge ad l.*

Se si immaginano $a_n,\ b_n\ c_n$ come le posizioni occupate tre punti materiali a, b, c sulla retta al tempo n, viene da pensare a due carabinieri a e c che tengono a braccetto un ubriaco b e che vanno entrambe alla caserma l; anche b suo malgrado andra' alla caserma l.

Dimostrazione.

Per semplicita', supponiamo che $a_n \leq b_n \leq c_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Sia $\varepsilon > 0$. Per l'ipotesi che a_n e c_n convergano ad l, si ha che esistono due indici $P, Q \in \mathbb{N}$ tali che

$$a_n \in]l-\varepsilon, l+\varepsilon[, \quad \forall n > P,$$

$$c_n \in]l-\varepsilon, l+\varepsilon[, \quad \forall n > Q;$$

posto $R = Max\{P, Q\}$ si ha

$$a_n,\ c_n \in]l-\varepsilon, l+\varepsilon[, \quad \forall n > R.$$

Per cio' e per l'ipotesi $a_n \leq b_n \leq c_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ha

$$b_n \in [a_n, c_n] \subset]l-\varepsilon, l+\varepsilon[, \quad \forall n > R,$$

da cui

$$b_n \in]l-\varepsilon, l+\varepsilon[, \quad \forall n > R.$$

$\square$

Ad esempio, consideriamo la successione

$$\tfrac{\sin n}{n}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Si ha

$$-\tfrac{1}{n} \leq \tfrac{\sin n}{n} \leq \tfrac{1}{n}, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

$$-\tfrac{1}{n} \to 0, \quad \tfrac{1}{n} \to 0;$$

dunque, per il teorema dei due carabinieri si ha

$$\tfrac{\sin n}{n} \to 0.$$

4. Sia c un capitale che viene rivalutato con cadenza annuale a un tasso di interesse annuale i, e sia c_n il capitale allo scadere dell'$n-$mo anno. Si ha $c_0 = c$, e

   $$c_n = c_{n-1} + ic_{n-1} = (1+i)c_{n-1},$$

   cosi'

   $$c_0 = c; \quad c_1 = (1+i)c; \quad c_2 = (1+i)c_1 = (1+i)^2c; \quad \ldots \quad c_n = (1+i)^n c; \ldots$$

5. **Numero di Nepero**.

   Sia $c = 1$ un capitale che viene rivalutato un tasso di interesse del 100% annuale.

   Se c viene rivalutato con cadenza annuale, alla fine dell'anno si avra' $c_1' = 2$;

se c viene rivalutato con cadenza semestrale, cioe' se viene rivalutato al termine di ciascun semestre a un tasso semestrale del $50\%,$ alla fine dell'anno si avra' $c_2' = (1+1/2)^2 = 9/4 = 2.25;$

se c viene rivalutato con cadenza quadrimestrale, cioe' se viene rivalutato al termine di ciascun quadrimestre a un tasso quadrimestrale del $33.\overline{3}\%,$ alla fine dell'anno si avra' $c_2' = (1+1/3)^3 = 64/27 \cong 2.37;$

...

Siamo cosi' condotti a considerare la successione

$$(1+\tfrac{1}{n})^n, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Si prova che questa successione e' crescente e limitata, dunque converge a un numero reale; questo numero viene detto numero di Nepero ed indicato con $e:$

$$e = \lim_n (1+\tfrac{1}{n})^n;$$

l'approssimazione con 10 decimali e'

$$e = 2.7182818284\ldots$$

6. **Limite e operazioni algebriche.**

Si prova che il limite di successioni convergenti si comporta bene rispetto alle operazioni algebriche

Teorema 2 *Siano* $\{a_n\}$ *e* $\{b_n\}$ *due successioni. Se* $\lim_n a_n = a$ *e* $\lim_n b_n = b$, *allora*

$$\lim_n (a_n + b_n) = a + b,$$

$$\lim_n (a_n b_n) = ab;$$

$$\lim_n (1/b_n) = 1/b, \qquad (b \neq 0).$$

Il comportamento del limite di successioni convergenti e divergenti rispetto all' operazione di somma e' dato dal seguente

Teorema 3 *Sia:* $\{a_n\}$ *una successione, convergente ad un numero* a, *o divergente a* $+\infty$ *o* $-\infty$; $\{b_n\}$ *una successione, convergente ad un numero* b, *o divergente a* $+\infty$ *o* $-\infty$. *Allora il comportamento della successione somma* $\{a_n + b_n\}$ *e' dato dalla seguente tabella*

$\lim a_n$	$\lim b_n$	$\lim (a_n + b_n)$
a	b	$a+b$
a	$+\infty$	$+\infty$
a	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$?$

.

Nel caso in cui $\lim a_n = +\infty$ e $\lim b_n = -\infty$ si possono presentare effettivamente tutte le eventualita', come mostrato dalla seguente tabella

a_n	b_n	$a_n + b_n$	$\lim(a_n + b_n)$
$n+1$	$-n$	1	1
$n+(-1)^n$	$-n$	$(-1)^n$	$\nexists$
n^2	$-n$	n^2-n	$+\infty$
n	$-n^2$	$n-n^2$	$-\infty$
$n^2+(-1)^n n$	$-n^2$	$(-1)^n n$	$\nexists$

.

Si dice che

$$+\infty - \infty$$

e' una forma indeterminata.

7. Alcune succession convergenti, come le successioni crescenti limitate ma non solo quelle, convergono al loro limite mantenendosi al di sotto di esso.

Definizione 1 *Siano $\{a_n\}$ una successione, ed $l \in \mathbb{R}$.*

Diciamo che $\{a_n\}$ tende a l^- per n che tende a $+\infty$ se per ogni $\varepsilon > 0$ si ha

$$l - \varepsilon < a_n \leq l, \qquad definitivamente.$$

Diciamo che $\{a_n\}$ tende a l^+ per n che tende a $+\infty$ se per ogni $\varepsilon > 0$ si ha

$$l \leq a_n < l + \varepsilon, \qquad definitivamente.$$

Alcuni esempi:

$$-\tfrac{1}{n} \to 0^-; \qquad \tfrac{1}{n} \to 0^+;$$

$$0, 1, 1/2, 1, 2/3, 1, 3/4, 1, \ldots \to 1^-$$

$$\tfrac{(-1)^n}{n} \to 0; \qquad \tfrac{(-1)^n}{n} \not\to 0^+; \qquad \tfrac{(-1)^n}{n} \not\to 0^-.$$

8. Il comportamento del limite di successioni convergenti e divergenti rispetto all' operazione di inversione e' dato dal seguente

Teorema 4 *Sia $\{b_n\}$ una successione definitivamente diversa da 0; se b_n converge ad un numero $b \neq 0$, o a 0^+, o diverge a $+\infty$, allora $1/b_n$ converge a $1/b$, o diverge a $+\infty$, o converge a 0^+ :*

$\lim a_n$	$\lim 1/b_n$
b	$1/b$
0^+	$+\infty$
$+\infty$	0^+

.

Vale un analogo risultato sostituendo tutti i + con -.

9. Il comportamento del limite di successioni convergenti e divergenti rispetto all' operazione di prodotto e' dato dal seguente

Teorema 5 *Sia: $\{a_n\}$ una successione, convergente ad un numero $a \neq 0$, o divergente a $\pm\infty$; $\{b_n\}$ una successione, convergente ad un numero b, o divergente a $\pm\infty$; Allora il comportamento della successione prodotto $\{a_n b_n\}$ e' dato dalla seguente tabella*

$\lim a_n$	$\lim b_n$	$\lim (a_n b_n)$
a	b	ab
a	∞	∞
∞	∞	∞

,

dove il segnio di $\lim (a_n b_n)$ *e' il prodotto dei segni di* $\lim a_n$ *e* $\lim b_n$.

Nel caso in cui $\lim a_n = 0$ e $\lim b_n = \pm\infty$ si possono presentare effettivamente tutte le eventualita', come mostrato dalla seguente tabella

a_n	b_n	$a_n b_n$	$\lim (a_n b_n)$
$1/n$	n	1	1
$(-1)^n/n$	n	$(-1)^n$	$\nexists$
$1/n^2$	n	$1/n$	0
$1/n$	n^2	n	$+\infty$
$(-1)^n/n$	n^2	$(-1)^n$	$\nexists$

.

Si dice che

$$0 \cdot \infty$$

e' una forma indeterminata.

Teorema 6 *Siano $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ due successioni convergenti o divergenti, quest'ultima definitivamente non nulla. Il comportamento della successione divisione $\{a_n/b_n\}$ e' dato dalla seguente tabella*

	$\lim b_n$	$b \neq 0$	0	∞
$\lim a_n$				
$a \neq 0$		a/b	∞	0
0		0	$?$	0
∞		∞	∞	$?$

,

dove il segnio di $\lim (a_n/b_n)$ *e' il prodotto dei segni di* $\lim a_n$ *e* $\lim b_n$.

Le celle della tabella con "?" corrispondono alle forme indeterminate

$$\frac{0}{0}; \qquad \frac{\infty}{\infty}.$$

10. **Algebra dei numeri reali estesi**

Consideriamo l'insieme $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \smile \{-\infty, +\infty\}$; su questo insieme definiamo le seguenti operazioni parziali, mediante tabelle:

somma:

	$-\infty$	b	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$?$
a	$-\infty$	$a+b$	$+\infty$
$+\infty$	$?$	$+\infty$	$+\infty$

differenza:

	$-\infty$	b	$+\infty$
$-\infty$	$?$	$-\infty$	$-\infty$
a	$+\infty$	$a-b$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$?$

prodotto:

	0	$b \neq 0$	∞
0	0	0	$?$
$a \neq 0$	0	ab	∞
∞	$?$	∞	∞

e divisione:

	0	$b \neq 0$	∞
0	$?$	0	0
$a \neq 0$	∞	a/b	0
∞	∞	∞	$?$

le celle con "?" corrispondono alle operazioni non definite, e i segni dei prodotti sono determinati con la solita regola.

Con queste convenzioni, i teoremi precedenti si possono riassumere cosi'

Teorema 7 *Siano $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ due successioni convergenti o divergenti. Valgono le seguenti uguaglianze, quando i termini che compaiono in esse sono definiti:*

$$\lim (a_n + b_n) = \lim a_n + \lim b_n; \qquad \lim (a_n - b_n) = \lim a_n - \lim b_n;$$

$$\lim (a_n b_n) = \lim a_n \lim b_n;$$

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim a_n}{\lim b_n}.$$

11. **Esempi**

- Consideriamo la successione
  $$n^2 - n, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$
  Si ha
  $$\lim (n^2 - n) = \lim (n^2) - \lim n = +\infty - \infty,$$
  una forma di indecisione.
  Mettiamo in evidenza l'addendo di grado massimo
  $$n^2 - n = n^2 \left(1 - \frac{1}{n^2}\right).$$
  Si ha
  $$\lim \left(n^2 \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)\right) = \lim (n^2) \cdot \lim \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = +\infty \cdot 1 = +\infty.$$

- Consideriamo una successione della forma
$$r_n = \frac{an^2+bn+c}{dn+e}, \qquad n = 0,1,2,\dots$$
dove $a, d \neq 0$. Si ha
$$\lim r_n = \lim \frac{an^2+bn+c}{dn+e} = \frac{\lim\left(an^2+bn+c\right)}{\lim\left(dn+e\right)} = \frac{\infty}{\infty},$$
una forma di indecisione.
Mettiamo in evidenza gli addendi di grado massimo
$$\frac{an^2+bn+c}{dn+e} = \frac{n^2\left(a+\frac{b}{n}+\frac{c}{n^2}\right)}{n\left(d+\frac{e}{n}\right)} = \frac{n\left(a+\frac{b}{n}+\frac{c}{n^2}\right)}{\left(d+\frac{e}{n}\right)}.$$
Si ha
$$\lim r_n = \lim \frac{n\left(a+\frac{b}{n}+\frac{c}{n^2}\right)}{\left(d+\frac{e}{n}\right)} = \frac{+\infty\cdot a}{d} = \infty,$$
dove il segno di ∞ e' quello di a/d.

12. Consideriamo una successione r_n, $n = 0,1,2,\dots$ dove r_n e' la frazione di un polinomio di grado p su un polinomio di grado q :
$$r_n = \frac{an^p+bn^{p-1}+\cdots}{cn^q+dn^{q-1}+\cdots}, \qquad n = 0,1,2,\dots$$
dove $a, c \neq 0$. Mettiamo in evidenza gli addendi di grado massimo
$$r_n = \frac{n^p\left(a+\frac{b}{n}+\cdots\right)}{n^q\left(c+\frac{d}{n}+\cdots\right)} = n^{p-q}\frac{a+\frac{b}{n}+\cdots}{c+\frac{d}{n}+\cdots}.$$
Si ha
$$\lim r_n = \lim\left(n^{p-q}\frac{a+\frac{b}{n}+\cdots}{c+\frac{d}{n}+\cdots}\right) = \begin{cases} \infty & p>q \\ \frac{a}{c} & p=q \\ 0 & p<q \end{cases}$$
il segno di ∞ e di 0 e' quello di a/c.

13. **Confronto fra Esponenziali, Potenze, Logaritmi**

    Abbiamo visto che le successioni potenza n^α con $\alpha > 1$, le successioni esponenziali b^n con $b > 1$, e le successioni logaritmo $\log_b n$ con $b > 1$ divergono tutte a $+\infty$.

    La considerazione del loro grafico suggerisce che le successioni esponenziali divergano piu velocemente delle successioni potenza che a loro volta divergano piu velocemente delle successini logaritmo.

    Cosi' e'. Vale il seguente Teorema, che non dimostriamo.

    Teorema 8 *Per le successioni divergenti b^n $(b>1)$ x^α $(\alpha>1)$ $\log_b n$ $(b>1)$ si ha*
$$\frac{b^n}{n^\alpha} \to +\infty \qquad \frac{n^\alpha}{\log_b n} \to +\infty, \qquad per n \to +\infty.$$