Matematica I, 09.10.2012

Limiti. Limiti di funzioni.

1. Il concetto di limite di una funzione e' il concetto fondamentale per lo studio dell'andamento della funzione nelle vicinanze di un punto del suo dominio - indipendentemente dal valore della funzione nel punto.

   Notazione: per un insieme A ed un elemento b, indichiamo con $A \setminus b$ l'insieme A privato dell'elemento b :

   $$A \setminus b = \{a \in A;\ a \neq b\}.$$

   Ricordiamo che l'insieme dei numeri reali estesi e' $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \smile \{-\infty, +\infty\}$.

   Definizione 1 *Siano $A \in \mathbb{R}$, e $c \in \mathbb{R}^*$. Diciamo che il punto c e' un punto di accumulazione per A se se in $A \setminus c$ esiste una successione a_n convergente a c.*

   Qualche esempio:

   - Sia $A = [0, 1[$; tutti i punti $c \in A$ sono di accumulazione per A; anche 1 e' di accumulazione per A, in quanto in $A \setminus 1 = A$ c'e' la successione $a_n = n/(n+1)$ che converge a 1; non ci sono altri punti di accumulazione per A;
   - Sia $A = [0, +\infty[$; tutti i punti $c \in A$ sono di accumulazione per A; il punto $+\infty$ e' di accumulazione per A, in quanto in $A \setminus +\infty = A$ c'e' la successione $a_n = n$ che converge a $+\infty$; non ci sono altri punti di accumulazione per A;
   - Sia $A = \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$; il punto $0 \in A$ non e' di accumulazione per A in quanto in $A \setminus 0 = \{1, 2, \ldots\}$ non c'e' alcuna successione che converge a 0; allo stesso modo si vede che nessun punti in $\mathbb{N}$ e' di accumulazione per $\mathbb{N}$; in realta' nessun punto in $\mathbb{R}$ e' di accumulazione per $\mathbb{N}$; il punto $+\infty$ e' di accumulazione per A, in quanto in $A \setminus +\infty = A$ c'e' la successione $a_n = n$ che converge a $+\infty$; in definitiva: $\mathbb{N}$ ha uno ed un solo punto di accumulazione: $+\infty$.

2. **Limiti di funzioni**

   Definizione 2 *Siano dati: una funzione $f : A \subseteq \mathbb{R} \to R$, un punto $c \in \mathbb{R}^*$ di accumulazione per A, un punto $l \in R^*$.*

   Diciamo che $f(x)$ tende a l per x che tende a c se la successione $f(a_n)$ tende a l, per ogni successione a_n in $A \setminus c$ che tende a c.

   In tal caso scriviamo

   $$f(x) \to l, \quad \textit{per } x \to c.$$

Diciamo anche che l e' il limite di $f(x)$ per x che tende a c, e scriviamo

$\lim_{x\to c} f(x) = l.$

In altri termini, $f(x)$ tende a l per x che tende a c se

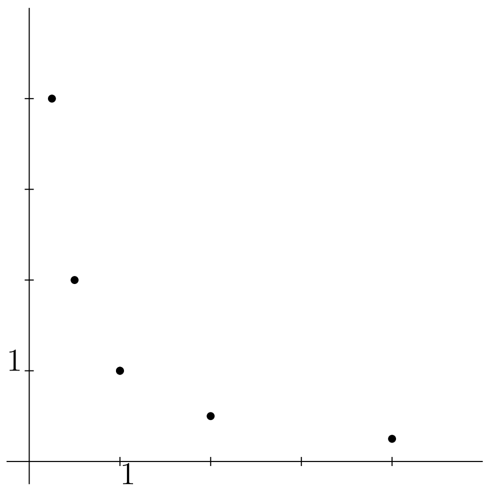
$$\forall \{a_n\} \subseteq A \setminus c, \qquad \lim a_n = c \quad \Rightarrow \quad \lim f(a_n) = l.$$

3. Consideriamo la funzione

   $]0, +\infty[\to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{x};$

   l'insieme dei punti di accumulazione di $]0, +\infty[$ e' $[0, +\infty[\smile +\infty$.

   Alcuni punti del grafico della funzione sono rappresentati nella figura seguente

   Una rappresentazione piu' adeguata (sebbene piu' arbitraria) del grafico si ottiene collegando questi punti con una linea continua. In questa forma di rappresentazione e' in qualche modo implicita l'assunzione che

   $\lim_{x\to c} \frac{1}{x} = \frac{1}{c},$

   per ogni $c \in \mathbb{R}$.

   Cosi' e'; lo verifichiamo usando la definizione. Sia $c \in]0, +\infty[$, e sia a_n una successione in $]0, +\infty[\setminus c$, con $\lim a_n = c$; per la teoria dei limiti di successioni, si ha

   $\lim \left(\frac{1}{a_n}\right) = \frac{1}{\lim a_n} = \frac{1}{c}.$

   Sia ora $c = 0$; per la nostra intuizione siamo portati a dire che

   $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} = +\infty.$

   Cosi' e'; lo verifichiamo usando la definizione. Sia a_n una successione in $]0, +\infty[\setminus 0 =]0, +\infty[$, con $\lim a_n = 0$; per la teoria dei limiti di successioni, si ha

$\lim \left(\frac{1}{a_n}\right) = \frac{1}{\lim a_n} = \frac{1}{0^+} = +\infty.$

Sia ora $c = +\infty$; per la nostra intuizione siamo portati a dire, e per la teoria dei limiti delle successioni possiamo verificare, che

$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0^+.$

4. Consideriamo le funzioni potenza

$$]0, +\infty[\to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^\alpha, \qquad (\alpha \in \mathbb{R}).$$

Per ogni c in $[0, +\infty[$, si intuisce e si verifica che

$\lim_{x \to c} x^\alpha = c^\alpha,$

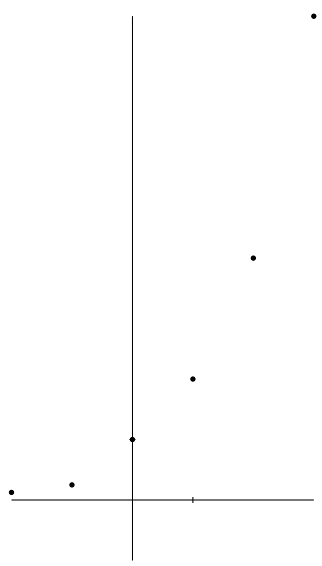
Per $c = +\infty$, si intuisce (si pensi a $\alpha = -1, 0, \frac{1}{2}, 1, 2$) e si verifica che

$$\lim_{x \to +\infty} x^\alpha = \begin{cases} +\infty & \alpha > 0 \\ 1 & \alpha = 0 \\ 0^+ & \alpha < 0 \end{cases}$$

5. Consideriamo le funzioni esponenziali

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto b^x. \qquad (b \in \mathbb{R},\ b > 0).$$

Alcuni punti del grafico della funzione esponenziale $x \mapsto 2^x$:



Per ogni c in $\mathbb{R}$, si intuisce e si verifica che

$\lim_{x \to c} b^x = b^c.$

Per $c = +\infty$, si intuisce (si pensi a $b = 2, 1, \frac{1}{2}$) e si verifica che

$$\lim_{x \to +\infty} b^x = \begin{cases} +\infty & b > 1 \\ 1 & b = 1 \\ 0^+ & 0 < b < 1 \end{cases}$$

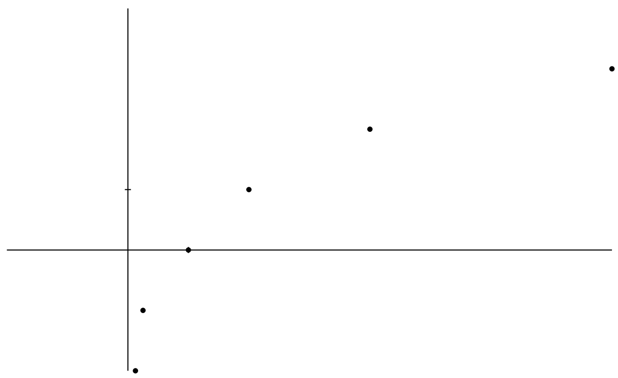
Per $c = -\infty$, si intuisce (si pensi a $b = 2, 1, \frac{1}{2}$) e si verifica che

$$\lim_{x\to-\infty} b^x = \begin{cases} 0^+ & b > 1 \\ 1 & b = 1 \\ +\infty & 0 < b < 1 \end{cases}$$

6. Consideriamo le funzioni logaritmo

$$]0, +\infty[\to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \log_b x. \qquad (b \in \mathbb{R},\ b > 0,\ b \neq 1).$$

Alcuni punti del grafico della funzione esponenziale $x \mapsto \log_2 x$:



Per ogni c in $\mathbb{R}$, si intuisce e si verifica che

$$\lim_{x\to c} \log_b x = \log_b c.$$

Per $c = 0$, si intuisce (si pensi a $b = 2, \frac{1}{2}$) e si verifica che

$$\lim_{x\to 0} \log_b x = \begin{cases} -\infty & b > 1 \\ +\infty & 0 < b < 1 \end{cases}$$

Per $c = +\infty$, si intuisce (si pensi a $b = 2, 1, \frac{1}{2}$) e si verifica che

$$\lim_{x\to+\infty} \log_b x = \begin{cases} +\infty & b > 1 \\ -\infty & 0 < b < 1 \end{cases}$$

7. Consideriamo la funzione $\delta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

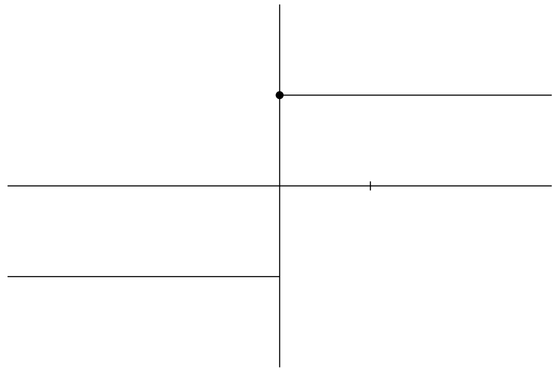
$$\delta(x) = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ 0 & x \neq 0 \end{cases}$$

Consideriamo il punto $c = 0$; per ogni successione $a_0, a_1, a_2, \ldots$ in $\mathbb{R} \setminus 0$ che converge a 0 si ha $0 = \delta(a_0) = \delta(a_1) = \delta(a_2) = \ldots$ dunque

$$\lim_{x\to 0} \delta(x) = 0.$$

8. Consideriamo la funzione "gradino" $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definita da

$$h(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$$



Per la nostra intuizione siamo portati a dire che la funzione h non tende alcun limite per x che tende a 0.

Lo verifichiamo usando la definizione. Infatti: alla successione $p_n : 1, 1/2, 1/3, \ldots$ che tende a 0^+ corrisponde la successione $h(p_n) : 1, 1, 1, \ldots$ costante uguale a 1; alla successione $q_n : -1, -1/2, -1/3, \ldots$ che tende a 0^- corrisponde la successione $h(q_n) : -1, -1, -1, \ldots$ costante uguale a -1; dunque non puo' esistere alcun $l \in \mathbb{R}^*$ tale che ad ogni successione a_n convergente a 0 corrisponda una successione $h(a_n)$ convergente a l.

9. **Funzioni continue**

Definizione 3 *Siano $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e c un punto di A di accumulazione per A. Diciamo che f e' continua in c se*

$$\lim_{x\to c} f(x) = f(c).$$

Diciamo che f e' continua su A se f e' continua in ogni punto di A.

Secondo questa definizione, possiamo parlare di funzioni continue su un insieme A solo se tutti i punti di A sono di accumulazione per A; solitamente, A sara' un intervallo (non ridotto a un punto) o una unione finita di tali intervalli.

Per quanto visto nei punti precedenti, abbiamo che

tutte le funzioni elementari sono continue nel loro dominio naturale.

La funzione δ non e' continua in 0; anche la funzione gradino non e' continua in 0.

10. **Limiti da sinistra e da destra**

Siano $A \subseteq \mathbb{R}$ e $c \in \mathbb{R}^*$. Diciamo che c e' un punto di accumulazione destro per A se in $A \setminus c$ esiste una successione a_n convergente a c^-; diciamo che c e' un punto di accumulazione sinistro per A se in $A \setminus c$ esiste una successione a_n convergente a c^+.

Definizione 4 *Siano:* $f : A \subseteq \mathbb{R} \to R$, $c \in \mathbb{R}^*$ *di accumulazione destro per* A, $l \in R^*$. *Diciamo che* $f(x)$ *tende al limite* l *per* x *che tende a* c *da sinistra se la successione* $f(a_n)$ *tende a* l, *per ogni successione* a_n *in* $A \setminus c$ *che tende a* c^-. *In tal caso scriviamo*

$$f(x) \to l, \quad \text{per } x \to c^-, \qquad o \qquad \lim_{x \to c^-} f(x) = l.$$

In modo analogo si definisce il significato della frase "$f(x)$ *tende al limite* l *per* x *che tende a* c *da destra," cui corrispondono le notazioni*

$$f(x) \to l, \quad \text{per } x \to c^+, \qquad o \qquad \lim_{x \to c^+} f(x) = l.$$

Dal buon comportamento delle successioni crescenti (e decrescenti) segue il buon comportamento delle funzioni crescenti (e quelle decrescenti).

Teorema 1 *Sia* $f : A \subseteq \mathbb{R} \to R$ *una funzione crescente,* $c \in \mathbb{R}^*$ *un punto di accumulazione destro per* A. *Se* f *e' limitata su* A, *allora esiste il limite di* $f(x)$ *per* x *che tende a* c *da sinistra, e si ha*

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = \sup_{x \in A} f(x);$$

se f *e' illimitata su* A, *allora*

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = +\infty.$$

Vale un'affermazione analoga per le funzioni decrescenti.

11. Consideriamo la funzione

$$g : \mathbb{R} \setminus 0 \to \mathbb{R}, \quad g : x \mapsto \cos\left(\tfrac{1}{x}\right).$$

La funzione g non tende alcun limite per x che tende a 0.

Infatti: alla successione p_n : $1/(2\pi), 1/(4\pi), 1/(6\pi), \ldots$ che tende a 0^+ corrisponde la successione $g(p_n)$: $1, 1, 1, \ldots$ costante uguale a 1; alla successione p_n : $1/\pi, 1/(3\pi), 1/(5\pi), \ldots$ che tende a 0^+ corrisponde la successione $g(q_n)$: $-1, -1, -1, \ldots$ costante uguale a -1; dunque non puo' esistere alcun $l \in \mathbb{R}^*$ tale che ad ogni successione a_n convergente a 0 corrisponda una successione $g(a_n)$ convergente a l.

In definitiva, $g(x)$ non tende ad ulcun limite per x che tende a 0 da destra; in modo analogo si prova che $g(x)$ non tende ad ulcun limite per x che tende a 0 da sinistra.

12. Dal teorema dei due carabinieri per le successioni segue il

Teorema 2 *Siano date tre funzioni* $f, g, h : A \subseteq \mathbb{R} \to R$, *un punto* $c \in \mathbb{R}^*$ *di accumulazione per* A, *un punto* $l \in R^*$. *Se*

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x), \qquad \forall x \in A,$$

$$\lim_{x \to c} f(x) = l = \lim_{x \to c} h(x),$$

allora

$$\lim_{x \to c} g(x) = l.$$

Esempio. Consideriamo la funzione

$$\mathbb{R} \setminus 0 \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x \cos\left(\tfrac{1}{x}\right).$$

Osserviamo che

$$-x \leq x \cos\left(\tfrac{1}{x}\right) \leq x,$$

$$\lim_{x\to 0}(-x) = 0 = \lim_{x\to 0}(x).$$

Da cio′ e dal teorema dei due carabinieri segue che

$$\lim_{x\to 0}(\big(x \cos\left(\tfrac{1}{x}\right)\big) = 0.$$