Matematica I, 10.10.2012

Limiti di funzioni (II)

1. **Limiti e Operazioni Algebriche**

   L'operazione di limite di successioni si comporta bene rispetto alle operazioni algebriche di somma (e sottrazione), prodotto (e divisione) di successioni. Questo fatto si trasporta direttamente dalle successioni alle funzioni.

   Teorema 1 *Siano* $f, g : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}^*$ *un punto di accumulazione per* A. *Se esistono* $\lim_{x\to c} f(x), \lim_{x\to c} g(x) \in R^*$, *allora*

   $$\begin{aligned} \lim_{x\to c} (f(x) \pm g(x)) &= \lim_{x\to c} f(x) \pm \lim_{x\to c} g(x), \\ \lim_{x\to c} (f(x)g(x)) &= \lim_{x\to c} f(x) \lim_{x\to c} g(x), \\ \lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{\lim_{x\to c} f(x)}{\lim_{x\to c} g(x)} \qquad (\lim_{x\to c} g(x) \neq 0). \end{aligned}$$

   In ciascuna delle uguaglianze sopra, il secondo membro e' il risultato di una operazione su numeri reali estesi; queata operazione e' definita a meno che si abbia una forma di indecisione

   $$+\infty - \infty, \quad 0 \cdot \infty, \quad 0/0, \quad \infty/\infty.$$

2. Cosi' come l'operazione di limite, anche la nozione di continuita' si comporta bene rispetto alle operazioni algebriche. In particolare si ha

   Proposizione 1 *Siano* $f, g : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *dove* A *e' un intervallo aperto. Se* f *e* g *sono continue su* A, *allora anche le funzioni somma* $f + g$, *prodotto* fg *e quoziente* f/g *(con* $g(x) \neq 0$ *per ogni* x *in* A*) sono continue su* A.

   Dal fatto che tutte le funzioni potenza $x \mapsto x^n$ (con $n = 0, 1, 2 \ldots$) sono continue su $\mathbb{R}$, segue che ciascuna funzione del tipo

   $$x \mapsto a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n \qquad (a_0, a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{R}),$$

   cioe' ciascuna funzione polinomiale, e' continua su $\mathbb{R}$; e che ciascuna funzione del tipo

   $$x \mapsto (a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n)/(b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m) \qquad (a_0, a_1, \cdots, b_m \in \mathbb{R}),$$

   cioe' ciascuna funzione razionale, e' continua su $\mathbb{R}$, tolti i punti in cui si annulla il denominatore.

   Inoltre, per una funzione polinomiale di grado $n > 0$ si ha

   $$\begin{aligned} &\lim_{x\to+\infty} (a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n) = \\ &\qquad \lim_{x\to+\infty} ((a_0/x^n + a_1/x^{n-1} + \cdots + a_n)\, x^n) = \end{aligned}$$

$$\lim_{x\to+\infty}(a_0/x^n + a_1/x^{n-1} + \cdots + a_n)\lim_{x\to+\infty}(x^n) =$$
$$a_n \cdot \infty = \infty,$$

dove il segno del risultato si ottiene dalla regola dei segni.

Per una funzione razionale rapporto di un polinomio di grado $n \geq 0$ su un polinomio di grado $m \geq 0$ si ha

$$\lim_{x\to+\infty}((a_0 + \cdots + a_n x^n)/(b_0 + \cdots + b_m x^m)) =$$
$$\lim_{x\to+\infty}(((a_0/x^n + \cdots + a_n)/(b_0/x^m + \cdots + b_m))\, x^{n-m}) =$$
$$\lim_{x\to+\infty}((a_0/x^n + \cdots + a_n)/(b_0/x^m + \cdots + b_m)) \cdot \lim_{x\to+\infty}(x^{n-m})$$
$$= \begin{cases} \infty & n > m \\ a_n/b_m & n = m \\ 0 & n < m \end{cases}.$$

3. Sui numeri reali oltre alle operazioni algebriche di somma e prodotto e′ definita un′operazione che inizialmente e′ algebrica, ma nella sua forma piu′ compiuta e′ algebrico-analitica: l′operazione di elevamento a potenza.

   L′operazione di limite di successioni si comporta bene rispetto all′ operazione di elevamento a potenza di un numero reale a una successione. Questo fatto si trasporta direttamente dalle successioni alle funzioni.

   Teorema 2 *Sia* $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}^*$ *un punto di accumulazione per* A; *sia* $b \in \mathbb{R}$, $b > 0$. *Se esiste* $\lim_{x\to c} f(x) \in R^*$, *allora*
   $$\lim_{x\to c}\left(b^{f(x)}\right) = b^{\lim_{x\to c} f(x)}.$$

   Nell′uguaglianza sopra, il secondo membro e′ il risultato dell′operazione di potenza di un numero reale $b > 0$ a un numero reale esteso, dove
   $$b^{+\infty} = \begin{cases} +\infty & b > 1 \\ 1 & b = 1 \\ 0^+ & 0 < b < 1 \end{cases}, \qquad b^{-\infty} = \begin{cases} 0^+ & b > 1 \\ 1 & b = 1 \\ +\infty & 0 < b < 1 \end{cases}.$$
   Ad esempio, per la funzione $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto e^{-x^2}$, si ha
   $$\lim_{x\to+\infty} e^{-x^2} = e^{\lim_{x\to+\infty}(-x^2)} = e^{-\infty} = 0^+$$

4. L′operazione di limite si comporta abbastanza bene rispetto alla composizione di funzioni, ma non completamente. Un risultato sufficiente per i nostri scopi e′ il seguente

   Teorema 3 *Siano date due funzioni*
   $$A \xrightarrow{f} B \subseteq C \xrightarrow{g} D, \qquad (A, B, C, D \subseteq \mathbb{R})$$
   e un punto $c \in A$ *di accumulazione per* A, *tale che* $f(c)$ *sia di accumulazione per* C. *Se* f *e′ continua in* c *e* g *e′ continua in* $f(c)$, *allora anche la funzione composta* $g \circ f : A \to D$ *e′ continua in* c. *In particolare, se* f *e′ continua su* A *e* g *e′ continua su* B, *con* A *e* B *intervalli aperti, allora* $g \circ f$ *e′ continua su* A.

Per questo teorema si ha che ogni funzione che ammette una scomposizione in fattori funzioni continue e' una funzione continua nel suo massimo insieme di definizione.

Esempio. Consideriamo la funzione

$$x \overset{f}{\mapsto} \log(\sqrt{x} - 1),$$

della quale ci riserviamo in seguito di dichiarare dominio e codominio.

Possiamo scomporre la funzione come segue

$$x \overset{p}{\mapsto} \sqrt{x} =: x \overset{q}{\mapsto} x - 1 =: x \overset{r}{\mapsto} \log x,$$

dove ciascun fattore p, q, r e' una funzione elementare, dunque continua nel suo dominio di definizione.

Allora $f = r \circ q \circ p$ e' una funzione continua nel suo massimo insieme di definizione, che e' l'insieme delle soluzioni del sistema di disequazioni

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ \sqrt{x} - 1 > 0 \end{cases},$$

che a sua volta e' l'intervallo $]1, +\infty[$.

5. L'operazione di limite di successioni si comporta bene rispetto alla relazione d'ordine. Questo fatto si trasporta direttamente dalle successioni alle funzioni.

Teorema 4 *Siano* $f, g : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}^*$ *un punto di accumulazione per* A. *Se esistono* $\lim_{x\to c} f(x), \lim_{x\to c} g(x) \in R^*$, *allora*

$$\begin{aligned} f(x) \geq 0 \quad \forall x \in A \quad &\Rightarrow \quad \lim_{x\to c} f(x) \geq 0, \\ f(x) \geq g(x) \quad \forall x \in A \quad &\Rightarrow \quad \lim_{x\to c} f(x) \geq \lim_{x\to c} g(x). \end{aligned}$$

Nelle implicazioni sopra, le conseguenze sono relazioni d'ordine fra numeri reali estesi; si intende che $-\infty < a < +\infty$, per ogni $a \in \mathbb{R}$.

6. **Confronto fra infiniti**

Il teorema sul confronto fra le successioni divergenti esponenziali, potenze e logaritmi si estende alle funzioni.

Teorema 5 *Le funzioni esponenziali* $x \mapsto b^x$ *(*$b > 1$*), potenze* $x \mapsto x^\alpha$ *(*$\alpha > 0$*), logaritmi* $x \mapsto \log_b x$ *(*$b > 1$*) divergono a* $+\infty$ *per* x *che tende a* $+\infty$, *le funzioni esponenziali divergono piu' velocemente delle potenze, e le potenze divergono piu' velocemente dei logaritmi:*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{b^x}{x^\alpha} = +\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{\log_b x} = +\infty$$

7. Consideriamo la funzione $]0,+\infty[\to]0,+\infty[$, $x \mapsto x^{1/x}$, e il suo limite per x che tende a $+\infty$. Si ha

   $x^{1/x} = \left(e^{\log x}\right)^{1/x} = e^{(\log x)/x}$,

   cosi'

   $\lim_{x\to+\infty} x^{1/x} = \lim_{x\to+\infty} e^{(\log x)/x} = e^{\lim_{x\to+\infty} (\log x)/x} = e^0 = 1.$

8. **Limiti notevoli**

   Si prova che
   $$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$
   Si tratta di una forma di indecisione del tipo $0/0$, che viene risolta con argomenti di geometria elementare.

   Il limite notevole di successioni
   $$\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$
   si estende al limite di funzioni
   $$\lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$
   Questo limite e' equivalente, per cambiamenti di variabile, ai limiti
   $$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1,$$
   $$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1.$$

9. Effettuando un cambiamento di variabile, si puo' passare da un limite per x che tende a 0 (con segno) a un limite per x che tende a ∞ (con segno), e viceversa.

   Precisamente, si ha che a ciascuna funzione

   $f(x) :]0, b[\to \mathbb{R}$

   corrisponde una funzione

   $f(\frac{1}{x}) :]\frac{1}{b}, +\infty[\to \mathbb{R}$;

   si ha che esiste il limite di $f(x)$ per x che tende a 0^+ se e solo se esiste il limite di $f(\frac{1}{x})$ per x che tende a $+\infty$, e in caso affermativo i limiti sono uguali:

   $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(\frac{1}{x})$.

   Ad esempio, alla funzione

   $]0, +\infty[\to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \cos\left(\frac{1}{x}\right)$

   corrisponde la funzione

$]0,+\infty[\to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \cos x;$

ora, il limite

$\lim_{x\to+\infty} \cos x$

non esiste, e cosi' non esiste

$\lim_{x\to 0^+} \cos\left(\frac{1}{x}\right).$