Matematica I, 12.10.2012

Derivate (I)

1. Diamo qui una definizione informale di "pendenza di una curva in un suo punto"; il termine "curva" non viene definito, si assume implicitamente un "buon comportamento" di una curva nelle vicinanze di un punto, e si sviluppa il discorso un po' grossolanamente.

   Comunque si scelgano due punti (distinti) su una stessa retta r, si ha che il segmento da essi determinato ha sempre la stessa pendenza, che per definizione viene detta pendenza della retta r. Questa proprieta' caratterizza le rette fra tutte le "curve" del piano.

   Sia data una "curva" $\mathcal{C}$ nel piano, e un suo punto P_0. Per ogni punto P di $\mathcal{C}$, diverso da P_0, consideriamo il segmento P_0P; al tendere di P a P_0 lungo $\mathcal{C}$, la lunghezza di P_0P tende a 0, ma la pendenza di P_0P tende ad un valore non necessariamente nullo; diciamo che questo valore limite e' la pendenza di $\mathcal{C}$ in P_0 :

   $\textit{pendenza di } \mathcal{C} \textit{ in } P_0 \;=\; \textit{limite della pendenza di } P_0P, \textit{ per } P \textit{ che tende a } P_0.$

   Posto

   $$P_0 = (x_0, y_0), \qquad P = (x, y), \qquad (P in \mathcal{C},\ P \neq P_0),$$

   la pendenza del segmento P_0P e' data da

   $$\frac{y - y_0}{x - x_0},$$

   e la pendenza di $\mathcal{C}$ in P_0 e' data da

   $$\textit{pendenza di } \mathcal{C} \textit{ in } P_0 = \lim_{P \to P_0} \frac{y - y_0}{x - x_0}.$$

   La retta tangente alla curva $\mathcal{C}$ nel suo punto P_0 e' la retta per P_0 che ha come pendenza la pendenza di $\mathcal{C}$ in P_0.

2. Passando dall'ambito delle curve all'ambito delle funzioni e precisando si ha

   Definizione 1 *Sia data una funzione $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e un punto $x_0 \in A$, di accumulazione per A. Per ogni punto $x \in A$ con $x \neq x_0$, il rapporto incrementale di f da x_0 a x e'*

   $$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0};$$

   se questo rapporto tende ad un limite finito per x che tende a x_0, allora diciamo che la funzione f e' derivabile nel punto x_0, diciamo che questo limite e' la derivata di f in x_0, e lo indichiamo con $f'(x_0)$; in simboli:

   $$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Indicato con $h = x - x_0$ l'incremento della variabile x, il rapporto incrementale diviene

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

la derivata di f in x_0 diviene

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Definizione 2 *Sia data una funzione $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e un punto $x_0 \in A$, di accumulazione per A; assumiamo che f sia derivabile in x_0. La retta tangente alla curva $y = f(x)$ grafico di f nel punto $(x_0, f(x_0))$ e' la retta per il punto $(x_0, f(x_0))$ avente come pendenza la derivata di f in x_0 :*

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

3. **Esempio**

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$.

Sia $x_0 = \frac{1}{2}$. Per vedere se f e' derivabile in $\frac{1}{2}$ consideriamo il limite

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}} \frac{x^2 - \frac{1}{4}}{x - \frac{1}{2}} = \lim_{x \to \frac{1}{2}} \frac{(x - \frac{1}{2})(x + \frac{1}{2})}{x - \frac{1}{2}} = \lim_{x \to \frac{1}{2}} (x + \frac{1}{2}) = 1,$$

dunque f e' derivabile in $\frac{1}{2}$ e $f'(\frac{1}{2}) = 1$.

Il grafico di f e' la parabola di equazione $y = x^2$, la tangente al grafico di f nel suo punto $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ e' la retta di equazione

$$y - \tfrac{1}{4} = 1 \cdot (x - \tfrac{1}{2}), \qquad \textit{cioe'} \qquad y = x - \tfrac{1}{4}.$$

Sia $x_0 \in \mathbb{R}$. Per vedere se f e' derivabile in x_0 consideriamo il limite

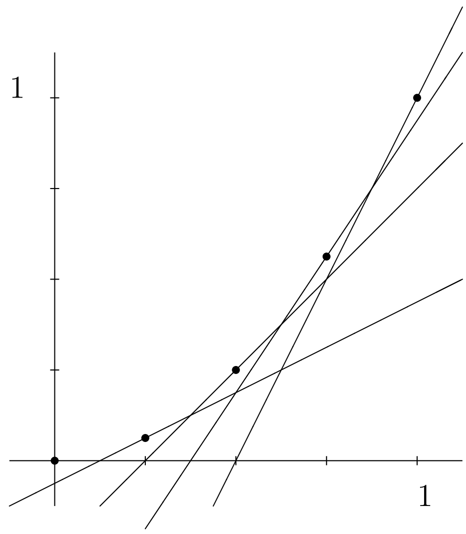
$$\lim_{x \to x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{(x - x_0)(x + x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} (x + x_0) = 2x_0,$$

dunque f e' derivabile in x_0 e $f'(x_0) = 2x_0$.

La tangente al grafico $y = x^2$ di f nel suo punto (x_0, x_0^2) e' la retta

$$y - x_0^2 = 2x_0(x - x_0), \qquad \textit{cioe'} \qquad y = 2x_0 x - x_0^2.$$

Nella figura seguente riportiamo alcuni punti del grafico di f, e le rette tangenti in essi al grafico.



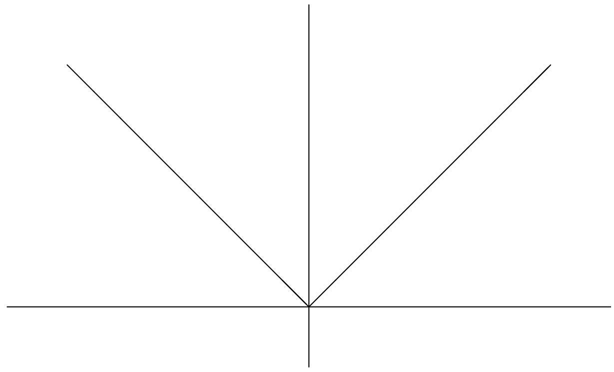
4. La derivabilita' e' una condizione piu' forte della continuita'.

   Teorema 1 *Siano $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, e $x_0 \in A$, di accumulazione per A. Se f e' derivabile in x_0, allora f e' continua in x_0.*

   Dimostrazione L'incremento di f da x_0 a x si puo' scrivere
   $$f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0);$$
   passando entrambe i membri al limite per x che tende a x_0 si ha
   $$\lim_{x \to x_0} (f(x) - f(x_0)) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x \to x_0} (x - x_0)$$
   da cui
   $$\lim_{x \to x_0} (f(x) - f(x_0)) = f'(x_0) \cdot 0 = 0,$$
   e
   $$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

5. Ci sono funzioni che sono continue ma non derivabili in un punto.
   Ad esempio, sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione valore assoluto
   $$f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0, \\ -x & \text{se } x \leq 0, \end{cases}$$
   che e' continua su $\mathbb{R}$.
   Il rapporto incrementale da $x_0 = 0$ a x e'
   $$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0, \\ -1 & \text{se } x < 0. \end{cases},$$
   e non ha limite per x che tende a 0. Dunque la funzione valore assoluto non e' derivabile in 0.

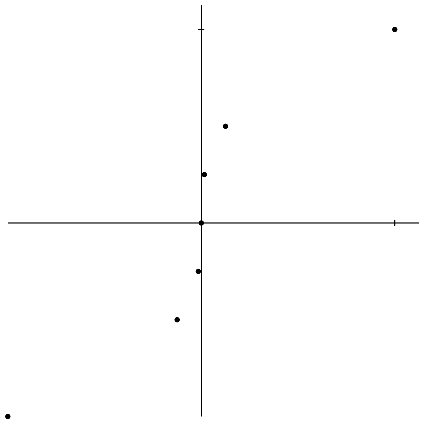
   Nella figura seguente riportiamo la curva $y = |x|$



Un altro esempio. La funzione $f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{x}$ e' continua su $\mathbb{R}$, ma non e' derivabile in 0, in quanto

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x^{\frac{1}{3}}}{x} = \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} \to +\infty, \qquad per\ x \to 0.$$

Nella figura seguente riportiamo alcuni punti della curva $y = \sqrt[3]{x}$



6. Di solito, considereremo funzioni $f : A \to \mathbb{R}$, dove A e' un intervallo, o un unione finita di intervalli (non ridotti a un punto), e cosi' ogni punto di A sara' di accumulazione per A. Se f e' derivabile in ogni punto x di A, allora si ha una funzione

   $A \to \mathbb{R} \qquad x \to f'(x)$

   che viene detta funzione derivata di f, ed indicata con f'.

   Ci sono vari modi di indicare la derivata di f in un punto x_0 :

$$f'(x_0), \qquad \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_0}, \qquad (Df)(x_0), \qquad \dot{f}(x_0),$$

   cui corrispondono vari modi di indicare la funzione derivata:

$$f', \qquad \frac{df}{dx}, \qquad Df, \qquad \dot{f}.$$

Spesso una funzione viene considerata come un'espressione $f(x)$ in una variabile reale x, e la sua funzione derivata come un'espressione $f'(x)$, $\frac{df}{dx}, \ldots$

7. **Funzioni potenza.**

   Ciascuna funzione potenza

   $]0, +\infty[\to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto x^\alpha \qquad (\alpha \in \mathbb{R})$

   e' derivabile sul suo dominio $]0, +\infty[$, e la sua funzione derivata e' data da

   $\frac{d}{dx}\left(x^\alpha\right) = \alpha x^{\alpha-1}.$

   Per $\alpha \geq 0$ la funzione potenza x^α e' definita anche per $x = 0$; se $\alpha \geq 1$, allora la funzione e' derivabile anche in 0, e si ha $dx^\alpha/dx|_{x=0} = 0$; se $0 < \alpha < 1$, la funzione non e' derivabile in $x = 0$.

   Per $\alpha \in \mathbb{Z}$ la funzione potenza x^α e' definita e derivabile su $\mathbb{R} \setminus 0$, e se $\alpha \neq 0$ e' definita e derivabile su tutto $\mathbb{R}$; vale sempre la regola di derivazione soprascritta.

   La regola di derivazione si puo' dimostrare abbastanza facilmente per $\alpha \in \mathbb{N}$ o $\mathbb{Z}$, come vedremo.

8. **Funzione esponenziale.**

   La funzione esponenziale

   $\mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto e^x$

   e' derivabile su $\mathbb{R}$ e coincide con la sua funzione derivata:

   $\frac{d}{dx}\left(e^x\right) = e^x.$

   Questo fatto deriva da un limite notevole sull'esponenziale (cfr. lez. VIII). Dato $x_0 \in \mathbb{R}$, si ha

   $$\frac{e^{x_0+h} - e^{x_0}}{h} = e^{x_0}\frac{e^h - 1}{h},$$

   passando al limite per $h \to 0$ si ha

   $$\lim_{h\to 0}\frac{e^{x_0+h} - e^{x_0}}{h} = e^{x_0}\lim_{h\to 0}\frac{e^h - 1}{h} = e^{x_0} \cdot 1 = e^{x_0};$$

   dunque

   $\frac{de^x}{dx}\Big|_{x=x_0} = e^{x_0}, \qquad \forall x_0 \in \mathbb{R}.$

9. **Funzione Logaritmo.**

   La funzione logaritmo

   $]0, +\infty[\to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \log x;$

   e' derivabile sul suo dominio $]0, +\infty[$ e la sua funzione derivata e':

   $\frac{d}{dx}\left(\log x\right) = \frac{1}{x}.$

Questo fatto deriva da un limite notevole sul logaritmo (cfr. lez. VIII). Dato $x_0 \in \mathbb{R}$, si ha

$$\frac{\log(x_0+h)-\log x_0}{h} = \frac{\log\left(\frac{x_0+h}{x_0}\right)}{h} = \frac{\log\left(1+\frac{h}{x_0}\right)}{h} = \frac{\log\left(1+\frac{h}{x_0}\right)}{\frac{h}{x_0}}\frac{1}{x_0},$$

passando al limite per $h \to 0$ si ha

$$\lim_{h\to 0}\frac{\log(x_0+h)-\log x_0}{h} = \frac{1}{x_0}\lim_{h\to 0}\frac{\log\left(1+\frac{h}{x_0}\right)}{\frac{h}{x_0}} = \frac{1}{x_0}\cdot 1 = \frac{1}{x_0};$$

dunque

$\frac{d\log x}{dx}\Big|_{x=x_0} = \frac{1}{x_0}, \qquad \forall x_0 \in \mathbb{R}.$

10. **Funzioni trigonometriche**

La funzione seno

$\mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \sin x$

e′ derivabile su $\mathbb{R}$ e la sua funzione derivata e′:

$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x.$

La funzione coseno

$\mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \cos x$

e′ derivabile su $\mathbb{R}$ e la sua funzione derivata e′:

$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x.$