Matematica I, 16.10.2012

Derivate e operazioni algebriche.

1. Prima di iniziare questa lezione, conviene rendere espliciti due fatti che sono impliciti nella definizione informale di derivata, banalmente verificabili secondo la definizione formale, e casi particolari della regola di derivazione delle potenze:

   una funzione costante ha derivata 0 *in ogni punto;*
   la funzione identita' ha derivata 1 *in ogni punto;*

2. Per brevita', d'ora in poi considereremo salvo avviso contrario funzioni definite su intervalli non ridotti a un punto. Osserviamo che ogni punto di un tale intervallo e' di accumulazione per l'intervallo.

3. Per due funzioni

   $$f, g : A \to \mathbb{R}$$

   con lo stesso dominio, definiamo la funzione somma $f+g$, la funzione prodotto fg, e la funzione quoziente f/g ponendo

   $$f+g : A \to \mathbb{R}, \qquad f+g : x \mapsto f(x)+g(x)$$
   $$fg : A \to \mathbb{R}, \qquad fg : x \mapsto f(x)g(x)$$
   $$f/g : A \to \mathbb{R}, \qquad f/g : x \mapsto f(x)/g(x) \qquad (g(x) \neq 0 \ su\ A)$$

4. **Derivate e somma, prodotto, quoziente di funzioni.**

   Proposizione 1 *Siano* $f, g : A \to \mathbb{R}$ *due funzioni definite su un intervallo* A *(non ridotto ad un punto), e sia* $x_0 \in A$. *Se le funzioni* f, g *sono derivabili in* x_0, *allora anche le funzioni* $f+g$ *e* fg *e* f/g *sono derivabili in* x_0, *inoltre*

   $$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0);$$
   $$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0);$$
   $$(f/g)'(x_0) = (f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0))/(g(x_0)^2), \qquad (g(x_0) \neq 0).$$

   Da questa proposizione segue che se f, g sono derivabili su A, allora anche $f+g, fg, f/g$ sono derivabili su A, inoltre

   $$(f+g)' = f' + g';$$
   $$(fg)' = f'g + fg';$$
   $$(f/g)' = (f'g - fg')/g^2, \qquad (g \neq 0 \ su\ A).$$

Dimostrazione. Dimostriamo solo la parte sulla funzione prodotto fg. Il rapporto incrementale di fg dal punto x_0 al punto x e'

$$\frac{(fg)(x)-(fg)(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0},$$

e puo' essere riscritto come

$$\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x)+f(x_0)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0},$$

cioe'

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}g(x)+f(x_0)\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0};$$

passando al limite per $x \to x_0$, e ricordando che f e g sono derivabili in x_0, e quindi anche continue in x_0, si ha

$$f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0).$$

5. Spesso una funzione f da un sottinsieme di $\mathbb{R}$ verso $\mathbb{R}$ viene identificata con una espressione $f(x)$ in una variabile x, (talvolta non si specifica l'insieme dei valori ammessi per la x). La funzione derivata della f viene identificata con una espressione, che spesso viene indicata con un simbolo come $\mathrm{D}f(x)$.

6. Dal fatto che le funzioni costanti e la funzione identita' sono derivabili su $\mathbb{R}$, e dalla proposizione precedente, segue che

   ogni funzione polinomiale e' derivabile su $\mathbb{R}$;
   ogni funzione razionale e' derivabile nel suo dominio di definizione.

   La formula di derivazione delle funzioni potenza $x \mapsto x^n$ ad esponente naturale, si puo' ricavare dal fatto che

   $\mathrm{D}x = 1$

   e dalla formula di derivazione del prodotto nel modo seguente.

   $\mathrm{D}(x^2) = \mathrm{D}(xx) = \mathrm{D}(x)x + x\mathrm{D}(x) = 2x;$

   $\mathrm{D}(x^3) = \mathrm{D}(xxx) = \mathrm{D}(x)xx + x\mathrm{D}(x)x + xx\mathrm{D}(x) = 3x^2;$

   in generale si ha

   $\mathrm{D}(x^n) = \mathrm{D}(x)xx\cdots x + x\mathrm{D}(x)x\cdots x + \cdots + xxx\cdots\mathrm{D}(x) = nx^{n-1}.$

   Anche la formula di derivazione della funzione $x \mapsto x^{-1}$ si puo' ricavare dalla formula di derivazione del prodotto, nel modo seguente.

   Consideriamo l'identita'

   $xx^{-1} = 1,$

   deriviamo entrambe i membri ed ottieniamo

$$\mathrm{D}(x)x^{-1} + x\mathrm{D}(x^{-1}) = 0; \qquad cioe' \qquad x^{-1} + x\mathrm{D}(x^{-1}) = 0;$$

da questa uguaglianza ricaviamo

$$\mathrm{D}(x^{-1}) = -x^{-2}.$$

Dal fatto che le funzioni costanti hanno derivata nulla, e dalla regola di derivazione del prodotto, segue infine che

$$\mathrm{D}(cf(x)) = c\mathrm{D}(f(x)), \qquad c \in \mathbb{R};$$

infatti

$$\mathrm{D}(cf(x)) = \mathrm{D}(c)f(x) + c\mathrm{D}(f(x)) = 0f(x) + c\mathrm{D}(f(x)) = c\mathrm{D}(f(x)).$$

7. Qualche esempio.

$$\mathrm{D}\left(3x^2 + 4x + 5\right) = 3\mathrm{D}\left(x^2\right) + 4\mathrm{D}(x) + \mathrm{D}(5) = 6x + 4;$$

$$\mathrm{D}(x \log x) = \mathrm{D}(x)\log x + x\mathrm{D}(\log x) = \log x + x\frac{1}{x} = \log x + 1;$$

$$\mathrm{D}\left(\frac{x}{\log x}\right) = \frac{(\mathrm{D}x)\log x - x(\mathrm{D}\log x)}{(\log x)^2} = \frac{\log x - x\frac{1}{x}}{(\log x)^2} = \frac{\log x - 1}{(\log x)^2};$$

8. **Derivate e composizione di funzioni.**

Proposizione 2 *Siano date due funzioni componibili f e g*

$$A \xrightarrow{f} B \subseteq C \xrightarrow{g} D,$$

definite su intervalli A, C (non ridotti a un punto), e sia $x_0 \in A$. Se f e' derivabile in x_0 e g e' derivabile in $f(x_0)$, allora $g \circ f$ e' derivabile in x_0, inoltre

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0).$$

Da questa proposizione segue che se f e' derivabile su A e g e' derivabile su C, allora $g \circ f$ e' derivabile su A, inoltre

$$(g \circ f)' = (g' \circ f)f'.$$

9. Nella pratica, una funzione composta $g \circ f$ puo' essere riguardata come una espressione $g(f(x))$ in una "variabile" $f(x)$ che a sua volta e' una espressione nella variabile x. La derivata dell'espressione $g(f(x))$ si calcola derivando g rispetto alla "variabile" $f(x)$, e moltiplicando per la derivata dell'espressione $f(x)$ rispetto ad x.

Dalle formule di derivazione delle funzioni elementari, e dalla precedente proposizione, seguono le formule di derivazione

$$\mathrm{D}(f(x)^\alpha) = \alpha f(x)^{\alpha-1}\mathrm{D}(f(x));$$

$$\mathrm{D}(e^{f(x)}) = e^{f(x)}\mathrm{D}(f(x));$$

$$\mathrm{D}(\log f(x)) = \mathrm{D}(f(x))/f(x).$$

10. Qualche esempio.

$$\mathrm{D}(\log{(2x+1)}) = \frac{1}{2x+1}\,2 = \frac{2}{2x+1};$$

$$\begin{aligned}\mathrm{D}(\log{(2\log{(3x+2)}+1)} &= \frac{1}{2\log{(3x+2)}+1}\,2\frac{1}{3x+2}\,3 \\ &= \frac{6}{(2\log{(3x+2)}+1)(3x+2)}.\end{aligned}$$

11. **Derivate e funzione inversa.**

Proposizione 3 *Siano date due funzioni una inversa dell'altra*

$$f : A \to B, \qquad f^{-1} : B \to A,$$

definite su intervalli A, B *(non ridotti ad un punto), e sia* $x_0 \in A$. *Se* f *e' derivabile in* x_0 *e* $f'(x_0) \neq 0$, *allora* f^{-1} *e' derivabile in* $f(x_0)$, *inoltre*

$$\left(f^{-1}\right)'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Da questa proposizione segue che se f e' derivabile su A e $f' \neq 0$ su A, allora f^{-1} e' derivabile su B, inoltre

$(f^{-1})' \circ f = 1/f'$,

equivalentemente,

$(f^{-1})' = 1/(f' \circ f^{-1})$.

Dimostrazione. Non proviamo che f^{-1} sia derivabile in x_0, ricaviamo solo la formula per la derivata di f^{-1} in x_0. Consideriamo le funzioni $f : A \to B$, $f^{-1} : B \to A$, e la loro funzione composta $f^{-1} \circ f = id_A : A \to A$; dall'ipotesi che f si derivabile in x_0, dal fatto (che diamo per buono) che f^{-1} sia derivabile in $f(x_0)$, e dalla proposizione sulla derivazione delle funzioni composte, abbiamo che id_A e' derivabile in x_0 (ovvio) e che (meno ovvio)

$$(id_A)'(x_0) = \left(f^{-1}\right)'(f(x_0))\, f'(x_0), \qquad cioe' \qquad 1 = \left(f^{-1}\right)'(f(x_0))\, f'(x_0);$$

per l'ipotesi $f'(x_0) \neq 0$, possiamo ricavare

$$\left(f^{-1}\right)'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

12. Nella notazione piu' adatta alla considerazione delle funzioni come espressioni, la regola di derivazione della funzine inversa si scrive

$$\left(\mathrm{D}\left(f^{-1}(x)\right)\right)_{x:=f(x)} = \frac{1}{\mathrm{D}(f(x))}.$$

equivalentemente

$$\mathrm{D}\left(f^{-1}(x)\right) = \frac{1}{\left(\mathrm{D}(f(x))\right)_{x:=f^{-1}(x)}}.$$

Esempio. Ricaviamo la formula per la derivata del logaritmo dalla formula per la derivata dell'esponenziale:

$$\mathrm{D}(\log x) = \frac{1}{\left(\mathrm{D}(e^x)\right)_{x:=\log x}} = \frac{1}{\left(e^x\right)_{x:=\log x}} = \frac{1}{x}.$$

13. **Derivate destre, sinistre, bilatere.**

Tutti i concetti e i fatti esposti sulle derivate valgono, con le dovute cautele, per le derivate destre e sinistre.

Definizione 1 *Siano $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione su un intervallo A (non ridotto a un punto) e $x_0 \in A$. Diciamo derivata destra e derivata sinistra di f in x_0 ed indichiamo con $f'_+(x_0)$ e $f'_-(x_0)$ il limite destro e il limite sinistro del rapporto incrementale di f in x_0, se esistono finiti,*

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \qquad f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Proposizione 4 *Siano $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione su un intervallo aperto A, e $x_0 \in A$. Se esistono la derivate destra $f'_+(x_0)$ e la derivata sinistra $f'_-(x_0)$ e sono uguali, allora esiste la derivata $f'(x_0)$, ed e' uguale al loro valore comune. Vale il viceversa.*

Questa proposizione sulle derivate si fonda sulla proposizione sui limiti

Proposizione 5 *Siano $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione su un intervallo aperto A, e $c \in A$. Se esistono e sono uguali i limiti sinistro e destro di $f(x)$ per x che tende a c, allora esiste il limite di $f(x)$ per x che tende a c, ed e' uguale al loro valore comune. Vale il viceversa.*