**Matematica I, 17.10.2012**

**Massimi, minimi, grafico di una funzione**

1. Al termine di questa lezione saremo in grado di determinare massimi, minimi, e di tracciare un grafico qualitativo di funzioni, come ad esempio

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = x^5 - 15x^3$$
$$g : [-1, 1[\to \mathbb{R}, \qquad g(x) = x^3 + 3x^2 + 6x + 9$$

2. Massimi e minimi.

**Definizione 1** *Siano $f : A \to \mathbb{R}$, e $x_0 \in A$.*

*Diciamo che $x_0$ e' un punto di massimo globale per $f$ se*

$$f(x_0) \geq f(x), \qquad \forall x \in A;$$

*diciamo che $x_0$ e' un punto di massimo locale per $f$ se esiste un intorno $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ (con $\delta > 0$) di $x_0$ tale che*

$$f(x_0) \geq f(x), \qquad \forall x \in ]x_0 - \delta, x_0 + \delta[ \frown A.$$

*Analogamente definiamo le nozioni di minimo globale e minimo locale.*

Figura 1 (lasciata da fare al lettore).

Scelti cinque punti $a < x_1 < x_2 < x_3 < b$, si tracci il grafico di una funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ derivabile in ogni punto di $[a, b]$ tranne che in $x_3$, tale che

$a$ sia un punto di minimo locale non globale per $f$, e $f'_+(a) > 0$;
$x_1$ sia un punto di massimo locale non globale per $f$;
$x_2$ sia un punto di minimo locale non globale per $f$;
$x_3$ sia un punto di massimo globale per $f$;
$b$ sia un punto di minimo globale per $f$, e $f'_-(b) < 0$;

3. Nella figura 1 si osservi che

nel punto del grafico corrispondente al punto di massimo locale $x_1$ la tangente al grafico e' parallela all'asse $x$, cioe' ha pendenza zero, e zero e' dunque la derivata della funzione in $x_1$; lo stesso capita nel punto del grafico corrispondente al punto di minimo locale $x_2$.

Prima di stabilire il risultato generale suggerito da queste osservazioni conviene introdurre la seguente

**Definizione 2** *Siano $A \subseteq \mathbb{R}$, e $x_0 \in \mathbb{R}$. Diciamo che $x_0$ e' un punto interno ad $A$ se esiste un intorno $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ (con $\delta > 0$) di $x_0$ contenuto in $A$.*

Un punto interno ad un insieme appartiene all'insieme, ma non tutti i punti che appartengono ad un insieme sono interni all'insieme. Ad esempio, i punti $a$ e $b$ appartengono all'itervallo $[a, b]$, ma non sono interni all'intervallo.

**Teorema 1** *(**di Fermat**) Siano dati una funzione $f : A \to \mathbb{R}$, e un punto $x_0 \in A$ interno ad $A$; la funzione $f$ sia derivabile nel punto $x_0$. Se $x_0$ e' un punto di massimo locale o minimo locale per $f$, allora*

$$f'(x_0) = 0.$$

Non e' detto che un punto in cui si annulli la derivata sia un punto di massimo locale o di minimo locale; ad esempio, la funzione $x \to x^3$ ha derivata nulla nel punto $x = 0$, ma questo punto non e' ne' di minimo locale ne' di massimo locale; un tale punto viene detto punto di flesso.

**Dimostrazione** Per le ipotesi $x_0$ punto interno di $A$, e $x_0$ punto di massimo locale per $f$, esiste un intorno $I$ abbastanza piccolo di $x_0$ tale che

$$I \subset A,$$

$$f(x_0) \geq f(x), \qquad \forall x \in I.$$

Consideriamo il rapporto incrementale di $f$ da $x_0$ a un punto $x$ in $I$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0};$$

si ha che il numeratore e' $\leq 0$ per ogni $x$ in $I$; inoltre, per gli $x$ in $I$ a sinistra di $x_0$ il denominatore e' $< 0$, mentre per gli $x$ in $I$ a destra di $x_0$ il denominatore e' $> 0$. Dunque

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \begin{cases} \geq 0 & \text{per } x < x_0 \\ \leq 0 & \text{per } x > x_0 \end{cases}$$

Passando al limite per $x \to x_0$ si ha

$$f'_-(x_0) \geq 0, \quad e \quad f'_+(x_0) \leq 0.$$

Per l'ipotesi $f$ derivabile in $x_0$ si deve avere

$$f'_-(x_0) = f'(x_0) = f'_+(x_0).$$

Dalle due precedenti affermazioni segue che

$$f'(x_0) = 0.$$

4. Applicazione.

Consideriamo la funzione

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = x^5 - 15x^3$$

La funzione $f$ e' un polinomio, dunque e' derivabile su $\mathbb{R}$; ogni punto di $\mathbb{R}$ e' chiaramente interno ad $\mathbb{R}$. Per il Teorema di Fermat, se $x \in \mathbb{R}$ e' un punto di massimo o minimo locale per $f$, allora

$$f'(x) = 0, \quad cioe' \quad 5x^4 - 45x^2 = 0, \quad cioe' \quad 5x^2(x+3)(x-3) = 0,$$

cosi' $x = -3, 0, 3$. Per ora non possiamo stabilire la natura di ciascuno di questi punti, cioe' se sia di massimo locale, di minimo locale, o di flesso.

Consideriamo la funzione

$$g : [-1, 1[ \to \mathbb{R}, \qquad g(x) = x^3 + 3x^2 + 6x + 9$$

La funzione $g$ e' un polinomio, dunque e' derivabile su $\mathbb{R}$, e in particolare sull'intervallo $[-1, 1[$; tutti i punti di questo intervallo, tranne $-1$, sono interni ad esso. Per il Teorema di Fermat, se $x \in ]-1, 1[$ e' un punto di massimo o minimo locale per $g$, allora $x$ e' soluzione dell'equazione

$$g'(x) = 0, \quad cioe' \quad 3x^2 + 6x + 6 = 0;$$

il discriminante di questa equazione e' $\Delta = 36 - 72 < 0$, cosi' l'equazione non ha soluzioni; dunque non ci sono punti di massimo o minimo locale per $g$ in $]-1, 1[$. Dobbiamo allora chiederci se il punto $-1$ sia un massimo o minimo locale per $g$. Per ora non possiamo stabilire la natura di questo punto.

5. **Funzioni crescenti/decrescenti.**

Sia $f : A \to \mathbb{R}$, crescente su $A$; allora per ogni $x_1, x_2$ in $A$ (con $x_1 \neq x_2$) si ha

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \geq 0;$$

infatti: se $x_1 < x_2$, allora $f(x_1) \leq f(x_2)$, cosi' numeratore e denominatore sono entrambi positivi; se $x_1 > x_2$, allora $f(x_1) \geq f(x_2)$, cosi' numeratore e denominatore sono entrambi negativi. Vale il viceversa.

Sia ora $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione crescente su un intervallo $A$ (non ridotto a un punto), e $f$ sia derivabile su $A$. Per il punto precedente, per ogni $x_0$ ed $x$ in $A$ si ha che

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0;$$

passando al limite per $x \to x_0$ si ha

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0.$$

Dunque, se se $f : A \to \mathbb{R}$ e' una funzione crescente e derivabile su un intervallo $A$, allora

$$f'(x_0) \geq 0, \qquad \forall x_0 \in A.$$

E' naturale chiedersi se vale il viceversa.

Analoghe considerazioni e questioni si hanno per le funzioni decrescenti.

6. Figura 2. (lasciata da fare al lettore)

   Si traccino il grafico $\mathcal{G}$ di una funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, continua sull'intervallo $[a, b]$ e derivabile su $]a, b[$, e la retta $r$ che unisce i punti estremi $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ di $\mathcal{G}$.

   Nella figura 2 si osservi che fra le rette tangenti al grafico $\mathcal{G}$ ce n'e' almeno una parallela alla retta $r$.

   **Teorema 2** *(***del valor medio, di Lagrange.***) Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, continua sull'intervallo chiuso $[a, b]$, e derivabile sull'intervallo aperto $]a, b[$. Esiste qualche punto $c \in ]a, b[$ tale che*
   $$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

   Non dimostriamo questo teorema, ma ne mettiamo in evidenza una conseguenza:

   **Corollario 1** *Sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile su un intervallo $A$.*

   *Se $f'(x_0) \geq 0$ per ogni $x_0 \in A$, allora $f$ e' crescente su $A$.*

   *Se $f'(x_0) \leq 0$ per ogni $x_0 \in A$, allora $f$ e' decrescente su $A$.*

   **Dimostrazione.** Dimostriamo la prima parte, la seconda e' analoga. Dati $x_1, x_2 \in A$, con $x_1 < x_2$ consideriamo l'incremento di $f$ da $x_1$ a $x_2$,
   $$f(x_2) - f(x_1),$$
   che possiamo riscrivere come
   $$f(x_2) - f(x_1) = ((f(x_2) - f(x_1))/(x_2 - x_1))\ (x_2 - x_1);$$
   per il teorema di Lagrange, applicato alla funzione $f$ derivabile (quindi continua) sull'intervallo $[x_1, x_2]$, esiste un $c \in ]x_1, x_2[$ tale che
   $$(f(x_2) - f(x_1))/(x_2 - x_1) = f'(c),$$
   e cosi'
   $$((f(x_2) - f(x_1))/(x_2 - x_1))\ (x_2 - x_1) = f'(c)\ (x_2 - x_1);$$
   per l'assunto $x_1 < x_2$ e l'ipotesi $f'(x) \geq 0$ su $A$, si ha
   $$f'(c)\ (x_2 - x_1) \geq 0.$$
   Dunque
   $$f(x_2) - f(x_1) \geq 0.$$

7. Dai due punti precedenti si ha la seguente caratterizzazione delle funzioni crescenti/decrescenti.

   *Sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile su un intervallo $A$;*
   *la funzione $f$ e' crescente su $A$ se e solo se $f'(x) \geq 0$ per ogni $x \in A$;*
   *la funzione $f$ e' decrescente su $A$ se e solo se $f'(x) \leq 0$ per ogni $x \in A$.*

Si ricava inoltre il seguente criterio per i punti di massimo/minimo locale.

**Proposizione 1** *Sia* $f : A \to \mathbb{R}$, *e* $x_0 \in A$, *interno ad* $A$. *Se* $f$ *e' derivabile in un intorno* $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ *di* $x_0$ *e*

$$f'(x) \begin{cases} \leq 0 & \textit{per } x_0 - \delta < x < x_0, \\ = 0 & \textit{per } x = x_0, \\ \geq 0 & \textit{per } x_0 < x < x_0 + \delta, \end{cases}$$

*allora*

$$f(x_0) \leq f(x), \qquad \forall x \in ]x_0 - \delta, x_0 + \delta[,$$

*in particolare* $x_0$ *e' un punto di minimo locale per* $f$.

*Vale un eneunciato analogo per i punti di massimo locale.*

8. Applicazione.

Consideriamo di nuovo la funzione

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = x^5 - 15x^3.$$

Si ha che $f$ e' derivabile su $\mathbb{R}$ e

$$f'(x) = 5x^4 - 45x^2 = 5x^2(x+3)(x-3).$$

Studiamo il segno di $f'(x) = 5x^2(x+3)(x-3)$; otteniamo che

$$f'(x) = 0 \qquad per\ x = -3, 0, 3,$$
$$f'(x) > 0 \qquad per\ x \in ]-\infty, -3[\cup]3, +\infty[,$$
$$f'(x) < 0 \qquad per\ x \in ]-3, 3[.$$

Possiamo riassumere questi dati nel seguente schema

| $x$ | | $-3$ | | $0$ | | $+3$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |

Per le proposizioni del punto precedente, abbiamo che $f$ e' crescente in $]-\infty, -3[$, ha un massimo locale in $-3$, e' decrescente in $]-3, 0[$, ha un punto di flesso in $0$, e' decrescente in $]0, +3[$, ha un punto di minimo locale in $+3$, e' crescente in $]+3, +\infty[$.

Consideriamo di nuovo la funzione

$$g : [-1, 1[\to \mathbb{R}, \qquad g(x) = x^3 + 3x^2 + 6x + 9$$

Si ha che $g$ e' derivabile su $\mathbb{R}$, in particolare su $[-1, 1[$, e

$$g'(x) = 3x^2 + 6x + 6.$$

Ora

$$g'(x) > 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Dunque $g$ e' crescente su $\mathbb{R}$, e a maggior ragione su $[-1, 1[$. Il punto $-1$ e' un punto di minimo globale per $g$.