

## Matematica I, 19.10.2012

1. Abbiamo visto come, tramite il concetto di derivata, si possa definire la retta tangente  $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$  in un punto  $P_0 = (x_0, f(x_0))$  al grafico  $y = f(x)$  di una funzione  $f$ ; ci si puo' chiedere quale proprieta' caratterizzi la retta tangente in  $P_0$  al grafico di  $f$  fra tutte le rette per  $P_0$ , e ci si puo' chiedere quale proprieta' possedga il polinomio  $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$  rispetto alla funzione  $f(x)$  nelle vicinanze del punto  $x_0$ .

Figura 1 (lasciata da fare al lettore).

Si rappresentino gli oggetti della questione nel caso della funzione  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definita da  $f(x) = x^2$ , e del punto  $x_0 = 1$ .

### 2. Approssimazione del I ordine.

**Teorema 1** Sia  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione definita su un intervallo aperto  $A$ , e sia  $x_0 \in A$ . Se  $f$  e' derivabile in  $x_0$ , allora la funzione  $f(x)$  puo' essere approssimata vicino a  $x_0$  col polinomio di primo grado  $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ , commettendo un errore  $R(x_0; x)$  che tende a zero piu' velocemente di  $x - x_0$ ; precisamente, in simboli si ha

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + R(x_0; x),$$

dove

$$\frac{R(x_0; x)}{x - x_0} \rightarrow 0 \quad \text{per } x \rightarrow x_0.$$

Osserviamo che nel caso in cui  $x_0 = 0$ , si ha

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + R(0; x),$$

dove

$$\frac{R(0; x)}{x} \rightarrow 0 \quad \text{per } x \rightarrow 0.$$

**Dimostrazione.**

$$\begin{aligned} \frac{R(x_0; x)}{x - x_0} &= \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} \\ &= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \rightarrow f'(x_0) - f'(x_0) = 0 \quad \text{per } x \rightarrow x_0. \end{aligned}$$

3. Il teorema di approssimazione del primo ordine si puo' usare nel calcolo dei limiti. Ad esempio, vediamo come si possa riottenere il limite notevole per il confronto fra la funzione  $\sin x$  e la funzione  $x$ , per  $x$  che tende a 0.

La funzione  $\sin x$  e' derivabile su tutto  $\mathbb{R}$ ; la sua approssimazione del I ordine vicino al punto 0 e'

$$\begin{aligned}\sin(x) &= \sin(0) + \sin'(0)x + R(0; x) \\ &= \sin(0) + \cos(0)x + R(0; x) = x + R(0; x),\end{aligned}$$

dove  $\frac{R(0; x)}{x} \rightarrow 0$  per  $x \rightarrow 0$ .

Ora

$$\frac{\sin(x)}{x} = \frac{x + R(0; x)}{x} = 1 + \frac{R(0; x)}{x} \rightarrow 1 + 0 = 1,$$

per  $x \rightarrow 0$ .

#### 4. Derivate di ordine superiore.

Sia  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione definita su un intervallo aperto  $A$ , e sia  $x_0 \in A$ ; possiamo allora chiederci se  $f$  sia derivabile in  $x_0$ , cioe' se esiste

$$f'(x_0).$$

Supponiamo che  $f$  sia derivabile su  $A$ , cioe' che esista la funzione derivata  $f' : A \rightarrow \mathbb{R}$ ; possiamo allora chiederci se  $f'$  sia derivabile in  $x_0$ , cioe' se esista

$$(f')'(x_0);$$

in caso affermativo diciamo che  $f$  e' derivabile due volte in  $x_0$ , diciamo "derivata seconda di  $f$  in  $x_0$ " al posto di "derivata di  $f'$  in  $x_0$ ," e poniamo

$$f''(x_0) = (f')'(x_0).$$

Supponiamo che  $f''$  sia derivabile su  $A$ , cioe' che esista la funzione derivata seconda  $f'' : A \rightarrow \mathbb{R}$ ; possiamo allora chiederci se  $f''$  sia derivabile in  $x_0$ , cioe' se esista

$$(f'')'(x_0);$$

in caso affermativo diciamo che  $f$  e' derivabile tre volte in  $x_0$ , diciamo "derivata terza di  $f$  in  $x_0$ " al posto di "derivata di  $f''$  in  $x_0$ ," e poniamo

$$f'''(x_0) = (f'')'(x_0).$$

... veniamo cosi' a definire le derivate successive di  $f$  in  $x_0$

$$f'(x_0), f''(x_0), f'''(x_0), \dots, f^{(i)}(x_0), \dots$$

Quando una funzione viene riguardata come una espressione  $f(x)$  in una variabile  $x$ , le sue derivate successive vengono indicate con

$$Df(x), D^2f(x), D^3f(x), \dots, D^i f(x), \dots$$

dove

$$D^i f(x) = D(D^{i-1}f(x)), \quad i = 1, 2, \dots$$

#### 5. Derivate successive delle funzioni elementari.

Esempio. Calcoliamo le derivate della funzione  $x \mapsto x^5$

$$x^4 \xrightarrow{D} 4x^3 \xrightarrow{D} 12x^2 \xrightarrow{D} 24x \xrightarrow{D} 24 \xrightarrow{D} 0 \xrightarrow{D} \dots$$

Ciascuna funzione potenza  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto x^n$ , con  $n$  numero naturale, e' derivabile qualsiasi numero di volte nel suo dominio. Le sue derivate sono date da

$$\begin{aligned} D^{(i)}(x^n) &= n(n-1)(n-2)\cdots(n-i+1)x^{n-i}, & \text{per } i \leq n \\ D^{(n)}(x^n) &= n! \\ D^{(i)}(x^n) &= 0 & \text{per } i > n. \end{aligned}$$

Ciascuna funzione potenza  $]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto x^\alpha$ , con  $\alpha$  numero reale, e' derivabile qualsiasi numero di volte nel suo dominio. Le sue derivate sono date da

$$D^{(i)}(x^\alpha) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-i+1)x^{\alpha-i}, \quad \text{per } i = 1, 2, \dots$$

Osserviamo che se  $\alpha$  non e' un numero naturale, allora tutte le derivate  $D^{(i)}(x^\alpha)$  della funzione  $x^\alpha$  sono diverse dalla funzione nulla.

La funzione esponenziale  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto e^x$ , e' derivabile qualsiasi numero di volte nel suo dominio. Le sue derivate sono date da

$$e^x \xrightarrow{D} e^x \xrightarrow{D} e^x \xrightarrow{D} \dots$$

cioe'

$$D^{(i)}(e^x) = e^x, \quad \text{per } i = 1, 2, \dots$$

La funzione logaritmo  $]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto \log x$ , e' derivabile qualsiasi numero di volte nel suo dominio. Le sue derivate sono date da

$$\log x \xrightarrow{D} \frac{1}{x} \xrightarrow{D} -\frac{1}{x^2} \xrightarrow{D} \frac{2}{x^3} \xrightarrow{D} -\frac{6}{x^3} \xrightarrow{D} \dots$$

cioe'

$$D^{(i)}(\log x) = \pm \frac{(i-1)!}{x^i}, \quad \text{per } i = 1, 2, \dots,$$

dove il segno e' + o - secondoche  $i$  sia dispari o pari, rispettivamente.

## 6. Derivate successive di polinomi.

Consideriamo un polinomio di II grado

$$p(x) = a + bx + cx^2;$$

la sua derivata prima e'

$$p'(x) = b + 2cx;$$

la sua derivata seconda e'

$$p''(x) = 2c;$$

le derivate dalla terza in poi sono tutte nulle.

Osserviamo che

$$p(0) = a, \quad p'(0) = b, \quad p''(0) = 2c;$$

in altri termini, i coefficienti del polinomio si ottengono dalle valutazioni in 0 del polinomio e delle sue derivate

$$a = p(0), \quad b = p'(0), \quad c = \frac{p''(0)}{2}.$$

Il polinomio puo' essere allora scritto come

$$p(x) = p(0) + p'(0)x + \frac{p''(0)}{2}x^2.$$

Questa scrittura descrive il polinomio in funzione del suo comportamento nelle vicinanze del punto 0. Passando da 0 a un qualsiasi punto  $x_0$  si ha la scrittura

$$p(x) = p(x_0) + p'(x_0)(x - x_0) + \frac{p''(x_0)}{2}(x - x_0)^2.$$

## 7. Approssimazione del II ordine.

**Teorema 2 (Formula di Taylor del II ordine, secondo Peano).** *Sia  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione definita su un intervallo aperto  $A$ , e sia  $x_0 \in A$ . Se  $f'$  esiste ed e' continua in un intorno di  $x_0$ , ed esiste  $f''(x_0)$ , allora la funzione  $f(x)$  puo' essere approssimata vicino a  $x_0$  col polinomio di secondo grado*

$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2,$$

commettendo un errore  $R(x_0; x)$  che tende a zero piu' velocemente di  $(x - x_0)^2$ ; precisamente, si ha

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + R(x_0; x),$$

dove

$$\frac{R(x_0; x)}{(x - x_0)^2} \rightarrow 0 \quad \text{per } x \rightarrow x_0.$$

Osserviamo che nel caso in cui  $x_0 = 0$ , si ha

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + R(0; x),$$

dove

$$\frac{R(0; x)}{x^2} \rightarrow 0 \quad \text{per } x \rightarrow 0.$$

## 8. Esempi.

L'approssimazione del II ordine della funzione esponenziale  $x \mapsto e^x$  vicino al punto 0 e'

$$\begin{aligned}e^x &= (e^x)_{x:=0} + (De^x)_{x:=0} x + \frac{1}{2} (D^2 e^x)_{x:=0} x^2 + R(0; x) \\ &= (e^x)_{x:=0} + (e^x)_{x:=0} x + \frac{1}{2} (e^x)_{x:=0} x^2 + R(0; x) \\ &= 1 + x + \frac{1}{2} x^2 + R(0; x),\end{aligned}$$

dove  $\frac{R(0;x)}{x^2} \rightarrow 0$  per  $x \rightarrow 0$ .

L'approssimazione del II ordine della funzione coseno  $x \mapsto \cos x$  vicino al punto 0 e'

$$\begin{aligned}\cos x &= (\cos x)_{x:=0} + (D \cos x)_{x:=0} x + \frac{1}{2} (D^2 \cos x)_{x:=0} x^2 + R(0; x) \\ &= (\cos x)_{x:=0} + (-\sin x)_{x:=0} x + \frac{1}{2} (-\cos x)_{x:=0} x^2 + R(0; x) \\ &= 1 - \frac{1}{2} x^2 + R(0; x),\end{aligned}$$

dove  $\frac{R(0;x)}{x^2} \rightarrow 0$  per  $x \rightarrow 0$ .

## 9. Derivata seconda, massimi e minimi.

**Teorema 3** Sia  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione definita su un intervallo aperto  $A$ , e sia  $x_0 \in A$ . Assumiamo che  $f'$  esista e sia continua in un intorno di  $x_0$ , e che esista  $f''(x_0)$ .

- se  $x_0$  e' un punto di minimo locale per  $f$ , allora  $f''(x_0) \geq 0$ ;
- se  $f'(x_0) = 0$  e  $f''(x_0) > 0$ , allora  $x_0$  e' un punto di minimo locale per  $f$ .

Analogamente per i punti di massimo.