Matematica I, 23.10.12

1. **Calcolo dell'area del "segmento di parabola" (Archimede, Fermat)**

   Consideriamo la parte di piano P compresa fra: l'arco di parabola $y = x^2$ (con $0 \leq x \leq 1$), l'asse x, la retta $x = 1$.

   Per ogni $n = 1, 2, 3, \ldots$ possiamo "approssimare dal di sotto" l'insieme P con l'insieme P_n costruito nel modo seguente

   dividiamo l'intervallo $[0, 1]$ in n intervalli uguali,

   $$[0, 1/n],\ [1/n, 2/n],\ [2/n, 3/n],\ \ldots,\ [(n-1)/n, 1];$$

   ciascun sottointervallo e' la base di un rettangolo massimo contenuto in P;

   prendiamo P_n come l'insieme unione di questi n rettangoli.

   A questa approssimazione dal di sotto di P con P_n corrisponde un'approssimazione dal di sotto dell'area di P con l'area di P_n.

   Al tendere di n a $+\infty$, l'insieme P_n tende all'insieme P, e l'area di P_n tende all'area di P.

   L'area di P_n e' la somma delle aree del primo, secondo, terzo, ..., $n-$mo rettangolo

   $$1/n \cdot 0 + 1/n \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^2 + 1/n \cdot \left(\frac{2}{n}\right)^2 + \cdots + 1/n \cdot \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 =$$
   $$= \frac{1}{n^3}\left(1^2 + 2^2 + \ldots + (n-1)^2\right).$$

   Si prova (non e' immediato) che

   $$1^2 + 2^2 + \ldots + (n-1)^2 = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}, \qquad \forall n = 1, 2, 3, \ldots.$$

   Dunque l'area di P_n e'

   $$\frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3},$$

   e passando al limite per $n \to +\infty$ si ha

   $$\lim \frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3} = \lim \frac{(1-1/n)(2-1/n)}{6} = \frac{1 \cdot 2}{6} = \frac{1}{3}.$$

2. **Trapezoidi, Somme di Cauchy-Riemann**

   Cosideriamo una funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ non negativa, definita su un intervallo chiuso $[a, b]$; il grafico di questa funzione, l'asse x, la retta $x = a$ e le retta $x = b$ delimitano una regione del piano, che diciamo "trapezoide di f su $[a, b]$".

Ad ogni suddivisione

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_n = b$$

dell'intervallo $[a, b]$ in n parti uguali, cioe' tale che

$$x_i - x_{i-1} = (b - a)/n \qquad \forall i = 1, 2, \dots, n$$

ed ogni scelta di n punti $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n$ in tali parti, cioe' tali che

$$\xi_i \in [x_{i-1}, x_i] \qquad \forall i = 1, 2, \dots, n$$

associamo l'insieme unione degli n rettangoli di base $[x_{i-1}, x_i]$ e altezza $f(\xi_i)$.

L'area di questo insieme e' la somma delle aree del primo, secondo, ..., $n-$mo rettangolo

$$\begin{aligned}(x_1 - x_0) \cdot f(\xi_1) + (x_2 - x_1) \cdot f(\xi_2) + \cdots + (x_n - x_{n-1}) \cdot f(\xi_n) = \\ = \frac{b-a}{n} \left(f(\xi_1) + f(\xi_2) + \ldots + f(\xi_n) \right).\end{aligned}$$

Questa somma viene detta somma di Cauchy-Riemann associata ad n e alla sequenza $\xi : \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$, e viene indicata con $S_n(\xi)$, cosi'

$$S_n(\xi) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i).$$

La considerazione di queste somme e' suggerita dalla considerazione di funzioni non negative, ma queste somme hanno senso per qualsiasi funzione.

3. **Integrale di Riemann**

Teorema 1 (e Definizione (Riemann)). *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Ciascuna successione $S_n(\xi)$ tende a un limite finito per $n \to +\infty$, indipendente dalle scelte dei punti intermedi ξ; questo limite viene detto integrale di f su $[a, b]$ e viene denotato con $\int_a^b f(x)dx$. In simboli, si pone*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \to +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i).$$

Non diamo la dimostazione di questo teorema.

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione non negativa, continua. Definiamo l'area del trapezoide di f su $[a, b]$ come l'integrale di f su $[a, b]$. Di fatto, questa definizione di area e' coerente con quella della geometria elementare.

Esempio. Il trapezoide della funzione identica $x \mapsto x$ su un intervallo $[a, b]$ (con $0 < a \le b$) e' un trapezio, le cui basi sono il segmento che congiunge $(a, 0)$ con (a, a) e il segmento che congiunge $(b, 0)$ con (b, b); cosi' si avra'

$$\int_a^b x\mathrm{d}x = \frac{(b+a)(b-a)}{2} = \frac{b^2 - a^2}{2}.$$

Per ciascuna funzione continua f su un intervallo $[a, b]$, si ha che

L'integrale di f su $[a, b]$ e' la differenza fra l'area della regione di piano che sta al di sotto del grafico di f ed al di sopra dell'asse x, e l'area della regione di piano che sta al di sotto dell'asse x ed al di sopra del grafico di f.

Esempio.

$$\int_{-1}^{2} x \, \mathrm{d}x = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

4. **Integrale e operazioni algebriche**

Teorema 2 *Siano $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ due funzioni continue definite su uno stesso intervallo $[a, b]$, e sia $\alpha \in \mathbb{R}$.*

$$\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx,$$
$$\int_a^b (\alpha f)(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx;$$

Se $f \leq g$ su $[a, b]$, allora

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

Inoltre, per ogni $c \in [a, b]$ si ha

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

Dimostrazione. Verifichiamo solo la prima proprieta'. Data una suddivisione $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ dell'intervallo $[a, b]$ in n parti uguali, e scelti n punti $\xi_1, \ldots, \xi_n$ in ciascuna di queste parti, si ha

$$\begin{aligned} S_n(f+g;\xi) &= \frac{b-a}{n} \sum_1^n (f+g)(\xi_i) \\ &= \frac{b-a}{n} \sum_1^n f(\xi_i) + \frac{b-a}{n} \sum_1^n g(\xi_i) = S_n(f;\xi) + S_n(g;\xi); \end{aligned}$$

passando al limite per $n \to +\infty$ si ottiene, per la definizione di integrale, e per il buon comportamento dei limiti rispetto alla somma

$$\int_a^b (f+g)(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

$\square$

Notazione. Sia $f : A \to \mathbb{R}$ uun funzione continua su un intervallo A; per ogni $a, b \in A$ con $a \leq b$ poniamo

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx;$$

sotto questa convenzione, per ogni tre punti $a_1, a_2, a_3 \in A$ (qualsiasi siano le relazioni d'ordine fra essi), si ha che

$$\int_{a_1}^{a_2} f(x)\mathrm{d}x + \int_{a_2}^{a_3} f(x)\mathrm{d}x = \int_{a_1}^{a_3} f(x)\mathrm{d}x.$$