Matematica I, 24.10.12

1. **Funzione integrale**

Definizione 1 *Siano $f : A \to \mathbb{R}$, funzione continua su A intervallo, e c in A. La funzione che associa ad ogni x in A l'integrale di f sull'intervallo $[c, x]$, viene detta funzione integrale di f con punto base c, e viene indicata con $I_{f,c}$. In simboli*

$$I_{f,c} : A \to \mathbb{R} \qquad I_{f,c}(x) = \int_c^x f(t)dt.$$

Osserviamo che, se f e' una funzione continua non negativa su A, allora

$$I_{f,c}(x) = \textit{ area del trapezoide di } f \textit{ su } [c, x];$$

in generale, se f e' una funzione continua qualsiasi, $I_{f,c}(x)$ e' una somma algebrica di aree.

Esempio. Un punto materiale P si muove sulla circonferenza di centro $(0, 0)$ e raggio 4 in senso orario, dal punto $(0, 4)$ al punto $(4, 0)$, poi sulla circonferenza di centro $(6, 0)$ e raggio 2 in senso antiorario, dal punto $(4, 0)$ al punto $(8, 0)$, infine sulla circonferenza di centro $(9, 0)$ e raggio 1 in senso orario, dal punto $(8, 0)$ al punto $(9, 1)$. La traiettoria di P e' il grafico di una funzione continua $f : [0, 9] \to \mathbb{R}$.

Sia $I_{f,0} : [0, 9] \to \mathbb{R}$ la funzione integrale della funzione f con punto base 0. Per il significato geometrico dell'integrale si ha che

$$\begin{aligned}
&I_{f,0}(0) = 0 \\
&I_{f,0} \textit{ crescente su } [0, 4] \\
&I_{f,0}(4) = 4\pi \\
&I_{f,0} \textit{ decrescente su } [4, 8] \\
&I_{f,0}(8) = 4\pi - 2\pi = 2\pi \\
&I_{f,0} \textit{ crescente su } [8, 9] \\
&I_{f,0}(9) = 4\pi - 2\pi + \frac{\pi}{4} = \frac{9\pi}{4}.
\end{aligned}$$

In particolare, si ha che

$$\begin{aligned}
&4 \textit{ e' punto di massimo locale per } I_{f,0}, \\
&8 \textit{ e' punto di minimo locale per } I_{f,0}.
\end{aligned}$$

Le figure dei grafici di f e di $I_{f,0}$ sono lasciate da fare al lettore.

2. **I Teorema Fondamentale**

Teorema 1 *Sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione continua su un intervallo A, e sia c un punto di A. La funzione integrale $I_{f,c} : A \to \mathbb{R}$ e' derivabile su A, e*

$$(I_{f,c})' = f.$$

Non diamo la dimostrazione di questo teorema (per ragioni di tempo).

Esempio. Riprendiamo l'esempio precedente; per il teorema abbiamo in particolare che

$$(I_{f,0})'(x) = f(x) \begin{cases} = 4 & \text{per } x = 0, \\ > 0 & \text{per } x \in [0,4[, \\ = 0 & \text{per } x = 4, \\ \in]-1,0[& \text{per } x \in]4,6[, \\ = -1 & \text{per } x = 6, \\ \in]-1,0[& \text{per } x \in]6,8[, \\ = 0 & \text{per } x = 8, \\ > 0 & \text{per } x \in]8,9], \\ = 1 & \text{per } x = 9. \end{cases}$$

Al lettore e' lasciata da fare una figura del grafico di $I_{f,0}$ che mostri questi ulteriori fatti.

3. **Primitive**

Definizione 2 *Sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione continua su un intervallo A. Una funzione $F : A \to \mathbb{R}$ derivabile su A tale che*

$$F' = f$$

si dice primitiva di f su A.

Esempio. Sia

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x;$

una primitiva di f e'

$F_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad F_0(x) = \frac{x^2}{2};$

piu' in generale, sono primitive di f tutte le funzioni del tipo

$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad F(x) = \frac{x^2}{2} + k,$

dove k e' una costante in $\mathbb{R}$. Viene naturale chiedersi se tutte le primitive di f sono di questo tipo.

Teorema 2 *Sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione continua su un intervallo A, e sia $F_0 : A \to \mathbb{R}$ una primitiva di f.*

Per ogni costante $k \in \mathbb{R}$, anche la funzione $F_0 + k : A \to \mathbb{R}$ e' una primitiva di f.

Se $F_1 : A \to \mathbb{R}$ e' una primitiva di f, allora esiste una costante $k_1 \in \mathbb{R}$ tale che

$$F_1 = F_0 + k_1.$$

Osserviamo che la prima parte del teorema deriva direttamente dal buon comportamento della derivazione rispetto alla somma di funzioni, e dal fatto che la derivata di una funzione costante e' nulla. Non diamo la dimostrazione della seconda parte del teorema (per ragioni di tempo).

Esempi, primitive delle funzioni elementari.

f	F
x^α	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + k, \qquad (\alpha \neq -1)$
x^{-1}	$\log x + k$
e^x	$e^x + k$
$\log x$	?
$\sin x$	$-\cos x + k$
$\cos x$	$\sin x + k$

4. **II Teorema Fondamentale**

Teorema 3 *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ unua funzione continua, e sia $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ una primitiva di f. Allora*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Nella prossima lezione vedremo come il II teorema fondamentale segua dal I teorema fondamentale e dal teorema sulle primitive.

Esempio. L'area della parte di piano compresa fra l'arco di parabola $y = x^2$ (con $0 \leq x \leq 1$), l'asse x, la retta $x = 1$, e'

$$\int_0^1 x^2 \mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{x=1} - \left[\frac{x^3}{3}\right]_{x=0} = \frac{1}{3}.$$

Esempio.

$$\int_1^2 (1/x + 2 + 3x)\mathrm{d}x = \left[\log x + 2x + \frac{3}{2}x^2\right]_{x=2} - \left[\log x + 2x + \frac{3}{2}x^2\right]_{x=1}$$
$$= \log 2 + 4 + 6 - (0 + 2 + \frac{3}{2}) = \log 2 - 6.5.$$

5. **Integrali Generalizzati**

Definizione 3 *Sia $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$, continua; diciamo che esiste l'integrale di f su $[a, +\infty[$ se esiste (finito o infinito) il limite dell'integrale di f su $[a, b]$ per $b \to +\infty$, e in tal caso poniamo*

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)dx.$$

Sia $f :] - \infty, b] \to \mathbb{R}$, continua. diciamo che esiste l'integrale di f su $] - \infty, b]$ se esiste (finito o infinito) il limite dell'integrale di f su $[a, b]$ per $a \to -\infty$, e in tal caso poniamo

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)dx.$$

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continua. diciamo che esiste l'integrale di f su $\mathbb{R}$ se per un punto c in $\mathbb{R}$ esistono (non infiniti di segno diverso) l'integrale di f su $] - \infty, c]$ e l'integrale di f su $[c, +\infty[$, e in tal caso poniamo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_c^{+\infty} f(x)dx.$$

Se $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ e' una funzione non negativa, si definisce l'area della regione di piano compresa fra il grafico di f, l'asse x, e la retta $x = a$, come il valore dell'integrale $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ di f su $[a, +\infty[$ (essendo f non negativa questo integrale esiste sempre, finito o infinito). Analogamente si definiscono le aree associate a funzioni non negative $] - \infty, b] \to \mathbb{R}$ o $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Esempi.

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$$
$$= \lim_{b\to+\infty} \left(\left[-\frac{1}{x}\right]_b - \left[-\frac{1}{x}\right]_1\right)$$
$$= \lim_{b\to+\infty} \left(-\frac{1}{b} + 1\right) = 1$$

$$
\begin{aligned}
\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x} \mathbf{d}x &= \lim_{b \to +\infty} \int_{1}^{b} \frac{1}{x} \mathbf{d}x \\
&= \lim_{b \to +\infty} \left([\log x]_b - [\log x]_1 \right) \\
&= \lim_{b \to +\infty} \log b = +\infty.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{b} e^x \mathbf{d}x &= \lim_{a \to -\infty} \int_{a}^{b} e^x \mathbf{d}x \\
&= \lim_{a \to -\infty} \left([e^x]_b - [e^x]_a \right) \\
&= \lim_{a \to -\infty} \left(e^b - e^a \right) = e^b.
\end{aligned}
$$