Matematica I, 26.10.12

1. **Integrale Indefinito**

   Per il II teorema fondamentale, il calcolo dell'integrale

   $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$

   di una funzione $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua su un intervallo $[a,b]$, puo' essere ricondotto alla determinazione di una funzione $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ primitiva di f su $[a,b]$, cioe' tale che

   $F' = f \quad su\ [a,b],$

   in quanto

   $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$

   Definizione 1 *Sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione continua su un intervallo A; l'insieme di tutte le funzioni $A \to \mathbb{R}$ primitive di f su A viene detto integrale indefinito di f su A, e viene indicato con*

   $$\int f(x)dx.$$

   Per il I teorema fondamentale, esiste almeno una primitiva di f su A; per il teorema sulle primitive, se $F : A \to \mathbb{R}$ e' una primitiva di f su A, allora $\int f(x)\mathrm{d}x$ e' l'insieme delle funzioni del tipo $F + k$, dove $k \in \mathbb{R}$; si usa scrivere

   $\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + k, \qquad (k \in \mathbb{R})$

   e spesso, per brevita', ci si limita a scrivere

   $\int f(x)\mathrm{d}x = F(x).$

   Esempio. Le primitive della funzione $x \mapsto x$ sono le funzioni $x \mapsto \frac{x^2}{2} + k$ (con $k \in \mathbb{R}$); per brevita', noi scriveremo

   $\int x\ \mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}.$

2. **Regole di integrazione; Integrali Elementari**

   Alle relazioni fra derivazione e operazioni algebriche

   $$(f(x) + g(x))' = (f(x))' + (g(x))',$$
   $$(\alpha f(x))' = \alpha\,(f(x))',$$

   corrispondono le seguenti relazioni fra integrazione e operazioni algebriche

   $$\int (f(x) + g(x))\,\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x + \int g(x)\mathrm{d}x,$$
   $$\int \alpha f(x)\mathrm{d}x = \alpha \int f(x)\mathrm{d}x, \qquad (\alpha \in \mathbb{R}).$$

Verifichiamo la prima identita'. Sia $F(x)$ una primitiva di $f(x)$, e sia $G(x)$ una primitiva di $g(x)$,

$(F(x))' = f(x), \qquad (G(x))' = g(x),$

cioe' sia

$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x), \qquad \int g(x)\mathrm{d}x = G(x);$

per la proposizione su derivazione e operazioni algebriche abbiamo

$(F(x) + G(x))' = (F(x))' + (G(x))'.$

Dunque abbiamo

$$\begin{aligned}\int (f(x) + g(x))\,\mathrm{d}x &= \int (F'(x) + G'(x))\,\mathrm{d}x \\ &= \int (F(x) + G(x))'\,\mathrm{d}x \\ &= F(x) + G(x) \\ &= \int f(x)\mathrm{d}x + \int g(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

La tabella delle primitive delle funzioni elementari si traduce nelle seguenti formule per gli integrali indefiniti delle funzini elementari

$$\begin{aligned}\int x^\alpha \mathrm{d}x &= \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \qquad (\alpha \neq -1) \\ \int x^{-1}\mathrm{d}x &= \log|x| \\ \int e^x \mathrm{d}x &= e^x \\ \int \sin(x)\mathrm{d}x &= -\cos(x) \\ \int \cos(x)\mathrm{d}x &= \sin(x)\end{aligned}$$

3. **Integrazione e composizione di funzioni**

Alla relazione fra derivazione e composizione

$$(f(g(x)))' = f'(g(x))\,g'(x)$$

corrisponde la relazione fra integrazione e composizione

$$\int f'(g(x))\,g'(x)\mathrm{d}x = f(g(x)).$$

Da questa formula seguono generalizzazioni delle formule per gli integrali delle funzini elementari, ad esempio

$$\begin{aligned}\int f(x)^\alpha f'(x)\mathrm{d}x &= \frac{f(x)^{\alpha+1}}{\alpha+1} \qquad (\alpha \neq -1),\\ \int \frac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x &= \log|f(x)|,\\ \int e^{f(x)} f'(x)\mathrm{d}x &= e^{f(x)}.\end{aligned}$$

Esempio.

$$\int \left(4x^2+5x+6\right)^{\frac{1}{2}}(8x+5)\mathrm{d}x = \frac{2}{3}\left(4x^2+5x+6\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Altri esempi.

$$\int xe^{x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int 2xe^{x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}e^{x^2};$$

$$\int \frac{x^2}{x^3-1}\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int \frac{3x^2}{x^3-1}\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\log\left|x^3-1\right|;$$

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^4}}\mathrm{d}x &= \int x^3(1-x^4)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\\ &= -\frac{1}{4}\int(-4x^3)(1-x^4)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\\ &= -\frac{1}{4}\,2\,(1-x^4)^{\frac{1}{2}}\\ &= -\frac{1}{2}\sqrt{1-x^4}.\end{aligned}$$

4. **Integrazione per parti**

Alla relazione fra derivazione e prodotto

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

corrisponde la seguente relazione fra integrazione e prodotto

$$\int \left(f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\right)\mathrm{d}x = f(x)g(x),$$

cioe'

$$\int f'(x)g(x)\mathrm{d}x + \int f(x)g'(x)\mathrm{d}x = f(x)g(x),$$

che puo' essere riscritta

$$\int f'(x)g(x)\mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\mathrm{d}x,$$

o

$$\int f(x)g'(x)\mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\mathrm{d}x.$$

Questa formula viene detta formula di integrazione per parti. L'uso tipico e' il seguente. Si vuole integrare una funzione $h(x)$; per ogni scrittura di $h(x)$ del tipo $h(x) = f'(x)g(x)$, la formula permette di ricondurre l'integrazione di $h(x)$ all'integrazione della funzione $f(x)g'(x)$; l'applicazione della formula ha successo se quest'ultima funzione e' piu' facile da integrare della prima.

Esempio. Si vuole calcolare l'integrale

$$\int xe^x\mathrm{d}x.$$

Tentativo 1.

$$\int \underbrace{x}_{\mathrm{f}'}\underbrace{e^x}_{\mathrm{g}}\mathrm{d}x = \underbrace{\frac{x^2}{2}}_{\mathrm{f}}\underbrace{e^x}_{\mathrm{g}} - \int \underbrace{\frac{x^2}{2}}_{\mathrm{f}}\underbrace{e^x}_{\mathrm{g}'}\mathrm{d}x;$$

con i metodi e i fatti finora disponibili non sappiamo integrare la funzione $\frac{x^2}{2}e^x$, il tentativo non ha avuto successo.

Tentativo 2.

$$\begin{aligned}\int \underbrace{x}_{\mathrm{f}}\underbrace{e^x}_{\mathrm{g}'}\mathrm{d}x &= \underbrace{x}_{\mathrm{f}}\underbrace{e^x}_{\mathrm{g}} - \int \underbrace{1}_{\mathrm{f}'}\underbrace{e^x}_{\mathrm{g}}\mathrm{d}x\\ &= xe^x - e^x = (x-1)e^x.\end{aligned}$$

Esempio. Si vuole calcolare l'integrale

$$\int x^2e^x\mathrm{d}x.$$

Tentativo.

$$\begin{aligned}\int \underbrace{x^2}_{\mathrm{f}}\underbrace{e^x}_{\mathrm{g}'}\mathrm{d}x &= \underbrace{x^2}_{\mathrm{f}}\underbrace{e^x}_{\mathrm{g}} - \int \underbrace{2x}_{\mathrm{f}'}\underbrace{e^x}_{\mathrm{g}}\mathrm{d}x\\ &= x^2e^x - 2(x-1)e^x = (x^2-2x+2)e^x.\end{aligned}$$

Esempio. Si vuole calcolare l'integrale

$$\int \log x\ \mathrm{d}x.$$

Tentativo.

$$\begin{aligned}\int \underbrace{1}_{\mathrm{f}'}\underbrace{\log x}_{\mathrm{g}}\ \mathrm{d}x &= \underbrace{x}_{\mathrm{f}}\underbrace{\log x}_{\mathrm{g}} - \int \underbrace{x}_{\mathrm{f}}\ \underbrace{\frac{1}{x}}_{\mathrm{g}'}\ \mathrm{d}x\\ &= x\log x - x = x(\log x - 1).\end{aligned}$$

5. Nella lezione scorsa abbiamo visto i seguenti Teoremi

TI (I Teorema fondamentale)

Ipotesi:	$f: A \to \mathbb{R};\ f\ cont.,\ A\ interv.;\ c \in A;$
Tesi:	$I_{f,c}: A \to \mathbb{R}\ deriv.\ su\ A;\ I'_{f,c} = f\ su\ A.$

TP (Teorema sulle primitive, parte non banale)

Ipotesi:	$f: A \to \mathbb{R};\ f\ cont.,\ A\ interv.;$ $F_0: A \to \mathbb{R};\ F'_0 = f;$ $F_1: A \to \mathbb{R};\ F'_1 = f;$
Tesi:	$\exists k \in \mathbb{R}:\ F_1 = F_0 + k.$

TII (II Teorema fondamentale)

Ipotesi:	$f: [a,b] \to \mathbb{R};\ f\ cont.,\ A\ interv.;$ $F: [a,b] \to \mathbb{R};\ F' = f;$
Tesi:	$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$

Diamo ora una dimostrazione di TII, a partire da TI e da TP.

L'ipotesi di TII e'

$f: [a,b] \to \mathbb{R};\ f\ cont.,\ A\ interv.;$
$F: [a,b] \to \mathbb{R};\ F' = f.$

Consideriamo

$$I_{f,c}: [a,b] \to \mathbb{R}, \qquad (c \in [a,b]);$$

per TI, e per ipotesi, rispettivamente, abbiamo

$$I'_{f,c} = f, \quad F' = f;$$

per TP, esiste un $k \in \mathbb{R}$ t.c.

$$I_{f,c} = F + k.$$

Ora

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\mathrm{d}x &= \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x \\
&= -\int_c^a f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x \\
\\
&= I_{f,c}(b) - I_{f,c}(a) \\
&= (F+k)(b) - (F+k)(a) \\
&= F(b) + k - (F(a) + k) = F(b) - F(a).
\end{aligned}$$

Abbiamo cosi' ottenuto

$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a),$

che e' la tesi di TII.