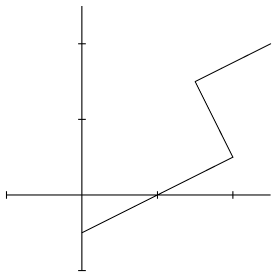
Matematica I, Esercizi I

1. Sia $f\ :]-\infty,0[\smile]0,+\infty[\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x}$; si dimostri che f e' strettamente decrescente su $]0,+\infty[$ e su $]-\infty,0[$; e' decrescente su $]-\infty,0[\smile]0,+\infty[$?

2. Sia G la spezzata

   (che collega i punti $(0,-0.5)$, $(2,0.5)$, $(1.5,1.5)$, $(2.5,2)$).

   - G e' il grafico di una funzione $[0,2.5]\to[-0.5,2]$?
   - sia G' il simmetrico di G rispetto alla retta $y=x$; G' e' il grafico di una funzione $[-0.5,2]\to[0,2.5]$?
   - in caso affermativo, questa funzione e' iniettiva? e' suriettiva?

3. In uno stato immaginario, la moneta ha qualsiasi valore reale; l'imposta I sul reddito delle persone fisiche dipende dal reddito imponibile R come segue

   - per lo scaglione di reddito da 0 a 10.000, il 10%;
   - per lo scaglione di reddito da 10.000 a 20.000, il 20%;
   - per lo scaglione di reddito da 20.000 in poi, il 30%.

   Si determini una formula esplicita per l'imposta I in funzione dal reddito imponibile R; si disegni il grafico della funzione $I=I(R)$.

4. Equazioni, Disequazioni.

   - si risolvano le disequazioni
     $2^x>5, \qquad 2^x>0;$
   - si dica quante soluzioni ha l'equazione
     $2^{x^2-x}=3^{x+1};$
   - si risolva la disequazione
     $\log(x^2-x)<1.$

5. Composizione/scomposizione di funzioni.

- Siano
  $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = 2x + 3; \qquad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g(x) = 4x + 5;$
  si determinino le funzioni composte $g \circ f$ e $f \circ g$.
- Siano
  $h :]-\infty, 0[\smile]0, +\infty[\to \mathbb{R}, \quad h(x) = 1/x;$
  $k :]-\infty, 1[\smile]1, +\infty[\to \mathbb{R}, \quad k(x) = 1/(1-x);$
  si determinino le funzioni composte $k \circ h$ e $h \circ k$.
- fattorizzare la seguente funzione in una composizione di funzioni elementari.
  $x \mapsto \log(2 \log(4x + 5) + 3)$
  dire qual'e' il dominio naturale della funzione.

6. Dimostrare che ogni successione crescente illimitata e' divergente a $+\infty$.

7. Usando il teorema sul buon comportamento lel limite rispetto alla potenza e all'esponenziale

$$\lim (a_n^\alpha) = (\lim a_n)^\alpha \quad (a_n > 0, \ def.), \qquad \lim b^{a_n} = b^{\lim a_n} \quad (b > 0),$$

e il teorema sul confronto fra gli infiniti esponenziale b^n ($b > 1$), potenza n^α ($\alpha > 0$), e logaritmo $\log_b n$ ($b > 1$)

$$\lim \frac{b^n}{n^\alpha} = +\infty, \qquad \lim \frac{n^\alpha}{\log n} = +\infty,$$

si calcolino i limiti delle seguenti successioni.

$e^n - n; \qquad \log n - n; \qquad e^n - \log n$

$n/(\log n)^2, \qquad n/(\log n)^\beta, \qquad n^\alpha/(\log n)^\beta;$

$\log n/n, \qquad n/e^n, \qquad \log n/n, \qquad n/e^n;$

$e^n/(n \log n), \qquad e^n/\left(n^\alpha (\log n)^\beta\right);$

$(1 + ne^{2n} + n^2 e^n + +n^3) / (n + n^2 e^n + n^3).$