Matematica I, 26.10.2012

Numeri reali

1. Indichiamo con $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, Q$ gli insiemi dei numeri naturali, interi relativi, e razionali:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$$
$$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$$
$$\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n};\ m, n \in \mathbb{Z},\ n \neq 0\};$$

   i numeri naturali vengono identificati con gli interi relativi non negativi, e i numeri interi relativi vengono identificti con le frazioni a denominatore 1, cosi' si ha

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}.$$

   Concentriamo la nostra attenzione sull'insieme dei numeri razionali $\mathbb{Q}$. In $\mathbb{Q}$ sono definite

   - due operazioni, di somma $+$ e prodotto $\cdot$; ciascuna operazione e' associativa e commutativa, le due operazioni sono legate dalla proprieta' distributiva; ci sono dei numeri speciali, 0 e 1, che sono elementi neutri per le due operazioni; ogni $q \in Q$ possiede un opposto $-q \in \mathbb{Q}$, caratterizzato dalla condizione $q + (-q) = 0$, ogni $q \in Q$ diverso da 0 possiede un inverso $q^{-1} \in \mathbb{Q}$, caratterizzato dalla condizione $qq^{-1} = 1$;
   - una relazione d'ordine totale $\leq$, legata alle operazioni dalle proprieta' che $\forall a, b, c \in \mathbb{Q}$,
     $a < b \quad \Rightarrow a + c < b + c; \qquad a < b \quad e \quad c > 0 \Rightarrow ac < bc.$

2. Ogni frazione puo' essere rigurdata come una divisione fra interi, questa divisione si puo' effettuare applicando all'infinito l'algoritmo della divisione, e si ottiene un numero intero decimale. Ad esempio si ha

$$\frac{5}{6} = 5 : 6 = 0,8333\cdots;$$

   si e' ottenuto un numero decimale periodico. Non e' un caso: ogni frazione e' rappresentata da un numero decimale periodico; viceversa, ogni numero decimale periodico rappresenta una frazione.

   > *Un numero reale e' un qualsiasi numero decimale; l'insieme dei numeri reali viene indicaro con $\mathbb{R}$.*

   L'insieme dei numeri razionali e' strettamente contenuto nell'insieme dei numeri reali in quanto ci sono dei numeri decimali non periodici:

$$\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

I numeri reali non razionali vengono detti irrazionali; alcuni numeri irrazionali famosi:

$$\sqrt{2}\ (Pitagora),\ \pi\ (Archimede),\ e\ (Nepero).$$

> *Le operazioni di somma e prodotto e l'ordinamento si estendono da $\mathbb{Q}$ ad $\mathbb{R}$, mantenendo le loro proprieta'.*

La definizione di queste operazioni sui reali non e' banale; noi svolgeremo dei calcoli espliciti solo sui razionali.

3. Proviamo che $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, cioe' che l'equazione

   $x^2 = 2$

   non ha soluzioni in $\mathbb{Q}$. Per assurdo, sia $\frac{m}{n}$ una soluzione dell'equazione, con $m, n \in \mathbb{N}$. Si ha dunque

   $\frac{m^2}{n^2} = 2; \qquad 2n^2 = m^2.$

   Ora, n ed m hanno una fattorizzazione in primi:

   $n = 2^a 3^b \cdots, \qquad a, b, \ldots \in \mathbb{N},$

   $m = 2^c 3^d \cdots, \qquad a, b, \ldots \in \mathbb{N}.$

   Sostituendo nell'equazione si ha

   $2(2^a 3^b \cdots)^2 = (2^c 3^d \cdots)^2,$

   cioe'

   $2^{2a+1} 3^{2b} \cdots = 2^{2c} 3^{2d} \cdots .$

   Osserviamo che l'esponente di 2 al primo membro e' dispari, mentre al secondo membro e' pari. Abbiamo cosi' un numero naturale che ha due fattorizzazioni in primi diverse, contro il teorema di fattorizazione unica.

4. Diamo un'idea del fatto che $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$.

   Costruiamo un numero decimale nel modo seguente: consideriamo la disequazione

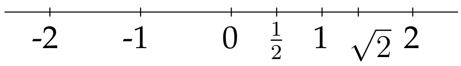
   $$x^2 \leq 2;$$

   cerchiamo il massimo fra le soluzioni intere, ed otteniamo 1; cerchiamo il massimo fra le soluzioni con un decimale, ed otteniamo 1.4; cerchiamo il massimo fra le soluzioni con due decimali, ed otteniamo 1.41; ... veniamo cosi' a definire un numero con infinite cifre decimali.

   Si prova che il quadrato di questo numero e' 2. Cosi'

   $$\sqrt{2} = 1,41\ldots \in \mathbb{R}.$$

5. Scelti su una retta un primo ed un diverso secondo punto, l'identificazione del numero 0 col primo punto e del numero 1 col secondo punto si estende in modo naturale ad una identificazione prima dei numeri naturali, poi dei numeri interi relativi, poi dei numeri razionali, e infine dei numeri reali con i punti della retta: ogni numero reale e' identificato con un punto della retta, ed ogni punto della retta si ottiene da uno ed un solo numero reale.



6. Nel passaggio dai numeri razionali ai numeri reali, l'ordinamento acquista una nuova proprieta'. Per presentarla, abbiamo bisogno di introdurre alcuni termini.

   Definizione 1 *Sia X un insieme con una relazione $\leq$ d'ordine totale (si pensi a $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$) e sia $A \subset X$ un sottinsieme non vuoto di X.*

   - *si dice che un elemento $b \in X$ e' il massimo di A, e si scrive $a = MaxA$, se*
     $$b \in A, \quad e \quad \forall x \in A, \quad x \leq a;$$
     analogamente si definisce il termine "minimo";
   - *si dice che un elemento $b \in X$ e' un maggiorante di A se*
     $$\forall x \in A, \quad x \leq b;$$
     analogamente si definisce il termine "minorante".
   - *si dice che b e' l'estremo superiore di A, e si scrive $b = supA$, se b e' il minimo dei maggioranti di A; analogamente si definisce il termine "estremo inferiore".*

   Ad esempio, per $X = \mathbb{Q}$ siano

   $A = \{x \in \mathbb{Q};\ x \leq 0\}$,

   $B = \{x \in \mathbb{Q};\ x < 0\}$,

   $C = \{x \in \mathbb{Q};\ x \geq 0\}$,

   $D = \{x \in \mathbb{Q};\ x^2 \leq 2\}$.

   Si ha che:

   0 e' il massimo, ed anche l'estremo superiore di A;

   non c'e' alcun elemento massimo per B, i maggioranti di B sono i numeri maggiori-uguali a 0, e 0 e' l'estremo superiore di B;

   non c'e' alcun massimo per C, non c'e' alcun maggiorante di C, e dunque non c'e' alcun estremo superiore per C;

   non c'e' alcun massimo per D, i maggioranti di D sono i numeri $x \in Q$ tali che $x^2 \geq 2$, e l'insieme di questi maggioranti non ha minimo.

Definizione 2 *Sia X un insieme con una relazione $\leq$ d'ordine totale. Un sottinsieme non vuoto $A \subseteq X$ di X si dice superiormente limitato in X se in X c'e' almeno un maggiorante di A; in modo analogo si definisce il termine "inferiormente limitato".*

Si ha che

> *In $\mathbb{R}$, ogni sottinsieme non vuoto superiormente limitato ha estremo superiore, ed ogni sottinsieme non vuoto inferiormente limitato ha estremo inferiore.*

Un esempio di uso tipico di questo fatto cruciale e' la definizione del numero reale 2π, cioe' della lunghezza di una circonferenza di raggio 1, come l'estremo superiore dei perimetri dei poligoni inscritti, o come l'estremo inferiore dei perimetri dei poligoni circoscritti.

Potenze

1. Per ogni numero reale $a \in \mathbb{R}$ e per ogni intero relativo $n \in \mathbb{Z}$, la potenza di base a ed esponente n e' definita da

$$a^n = \begin{cases} aa\cdots a \quad (n \text{ volte}) & \textit{per } n > 0; \\ 1 & \textit{per } n = 0; \\ a^{-1}a^{-1}\cdots a^{-1} \quad (-n \text{ volte}) & \textit{per } n < 0; \end{cases} ;$$

   le potenze con esponente negativo sono definite solo per $a \neq 0$.

   Ad esempio si ha:

   $(-\frac{2}{3})^{-2} = (-\frac{3}{2})^2 = \frac{9}{4}$.

   Le potenze ad esponente intero relativo hanno le seguenti proprieta':

$$\begin{aligned} a^m a^n &= a^{m+n}; \\ (a^m)^n &= a^{mn}; \\ (ab)^m &= a^m b^m. \end{aligned}$$

2. Le potenze ad esponente reciproco di un numero naturale si definiscono tramite le radici:

   $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}, \qquad (a \geq 0)$

   $a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a},$

   $a^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{a}, \qquad (a \geq 0)$

   $\vdots$

Per ogni numero reale positivo a e per ogni numero razionale $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$, la potenza di base a ed esponente $\frac{m}{n}$ e' definita da

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m.$$

Ad esempio si ha

$$2^{-\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{2^{-2}} = \sqrt[3]{\frac{1}{4}}.$$

Le proprieta' delle potenze ad esponente intero relativo continuano a valere per le potenze ad esponente razionale.

3. Per ogni numero reale positivo $a > 0$ e per ogni numero reale r, si puo' definire la potenza a^r di base a ed esponente r.

   Non diamo la definizione, ma solo un'idea intuitiva su un esempio.

   La potenza 2^π si puo' ottenere considerando la successione $3,\ 3,1,\ 3,14,\ \ldots$ di decimali che approssimano π, ed usando la corrispondente successione di potenze ad esponente razionale $2^3,\ 2^{3,1},\ 2^{3,14},\ \ldots$ per definire per approssimazione 2^π.

   Si dimostra che

   > *le proprieta' delle potenze continuano a valere per le potenze ad esponente reale.*

Valore assoluto, intervalli, intorni

1. Il valore assoluto di un numero reale a e' il numero reale $|a|$ definito da

$$|a| = \begin{cases} a & se\ a \geq 0 \\ -a & se\ a \leq 0; \end{cases}.$$

   Il valore assoluto e' legato all'ordinamento ed alle operazioni dalle proprieta'

$$\begin{aligned} |a| \geq 0; &\qquad |a| = 0\ se\ e\ solo\ se\ a = 0 \\ |ab| = |a||b|; & \\ |a+b| \leq |a| + |b|, & \end{aligned}$$

   per ogni $a, b \in R$.

   Osserviamo che

$$|a-b| = \left\{ \begin{array}{ll} a-b & se\ a \geq b \\ b-a & se\ b \leq a; \end{array} \right\} = (distanza\ fra\ a\ e\ b).$$

   per ogni $a, b \in R$.

2. Gli intervalli superiormente illimitati sono definiti da

   $[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} : \ x \geq a\},$

   $]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} : \ x > a\};$

   gli intervalli inferiormente illimitati sono definiti da

   $]-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} : \ x \leq a\},$

   $]-\infty, a[= \{x \in \mathbb{R} : \ x < a\}.$

   L'intervallo aperto e l'intervallo chiuso di estremi $a \leq b$ sono definiti rispettivamente da

   $]a, b[= \{x \in \mathbb{R} : \ a < x < b\},$

   $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : \ a \leq x \leq b\}.$

   In modo analogo si definiscono gli intervalli limitati $]a, b], \ [a, b[$.

Definizione 3 *Per ogni punto $a \in \mathbb{R}$ ed ogni $r > 0$, l'intorno di centro a e raggio r e' l'insieme dei punti di $\mathbb{R}$ che distano da a per meno di r :*

$$\{x \in \mathbb{R} : \ |x - a| < r\} =]a - r, a + r[.$$