Lezione del 19.09. Alcuni argomenti in dettaglio.

Simboli per retta, piano, spazio. Numeri reali e punti della retta. $\mathbb{Q}$ insieme dei numeri razionali; $\mathbb{R}$ insieme dei numeri reali. $\mathcal{E}^1, \mathcal{E}^2, \mathcal{E}^3$ insiemi dei punti della retta, del piano e dello spazio euclidei; $\mathcal{E}$ uno di questi insiemi.

Identificazione di $\mathbb{R}$ con $\mathcal{E}^1$, secondo un sistema di riferimento (un punto O, un segmento unità u, un orientamento). A ciascun numero reale $a \neq 0$ si associa il punto P di $\mathcal{E}^1$ tale che: (1) la misura del segmento OP rispetto ad u sia $|a|$ (valore assoluto di a), (2) P segue o precede il punto O secondo che $a > 0$ oppure $a < 0$; al numero 0 si associa il punto O. Fatto fondamentale: ogni punto della retta è il punto associato ad un (e un solo) numero reale, si ha una cioè un'applicazione biiettiva da $\mathbb{R}$ verso $\mathcal{E}^1$. L'analoga applicazione da $\mathbb{Q}$ verso $\mathbb{R}$ non è biiettiva.

Segmenti orientati. Per fissare le idee considero il piano $\mathcal{E}^2$; il discorso è simile in $\mathcal{E}^3$, e degenera in modo naturale in $\mathcal{E}^1$. Indico con AB il segmento di estremi A e B con l'orientamento da A verso B; i segmenti orientati AB e BA sono sempre diversi, a meno che siano degneri in un punto. Rappresento ciascun segmento orientato non degenere con una freccia.

Nel seguito di regola intendo il parallelismo in senso debole, ammetto cioè come parallele anche due rette coincidenti.

Relazione di equivalenza $\simeq$ fra segmenti orientati. Se AB e $A'B'$ sono entrambi non ridotti ad un punto, pongo $AB \simeq A'B'$ se e solo se AB e $A'B'$ individuano segmenti che hanno la stessa lunghezza ed individuano rette orientate che sono parallele ed equiverse; se almeno uno fra AB e $A'B'$ è ridotto a un punto, pongo $AB \simeq A'B'$ se e solo se sia AB che $A'B'$ sono ridotti ad un punto.

Dico che un quadrilatero è un parallelogramma se e solo se i lati opposti hanno la stessa lunghezza e sono paralleli. Ammetto anche il caso in cui tutti i lati siano su una retta, anche il sottocaso in cui due dei lati opposti siano ridotti a un punto, ed anche il sottosottocaso in cui tutti i lati siano ridotti ad un punto.

Proposizione. Dati un segmento orientato AB ed un punto A' esiste uno ed un solo segmento orientato $A'B'$ con primo estremo A' ed equivalente ad AB. Specificamente, $A'B'$ è l'unico segmento orientato tale che AB, $A'B'$, AA', BB' siano lati di un parallelogramma.

Spazi vettoriali geometrici; spazi vettoriali. Per fissare le idee considero il piano $\mathcal{E}^2$; il discorso è simile in $\mathcal{E}^3$, e degenera in modo naturale in $\mathcal{E}^1$. Fissato un punto O, si considerano i segmenti orientati OP con primo estremo fissato uguale ad O e ultimo estremo P variabile; si osserva che due segmenti orientati OA e OB sono equivalenti se e solo se sono uguali. Questi segmenti orientati si dicono "vettori geometrici centrati in O", in breve "vettori" e si indicano anche con lettere in grassetto come $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \ldots$. L'insieme di questi vettori si indica con $\mathcal{V}_O^2$; in simboli: $\mathcal{V}_O^2 = \{OP|\ P \in \mathcal{E}^2\}$. Il vettore OO si dice "vettore nullo" e si indica con $\mathbf{0}$; due vettori centrati in O che hanno ultimi estremi simmetrici rispetto ad O si dicono "opposti"; se uno di essi si indica con $\mathbf{v}$ allora l'altro si indica con $-\mathbf{v}$. I numeri reali vengono detti "scalari".

Si ha un'operazione di somma di vettori, che a partire da due vettori dà un vettore, e un'operazione di prodotto per scalari, che a partire da uno scalare ed un vettore dà un vettore.

Definizione di somma di vettori. Dati due vettori OA e OB, indicato con AC il segmento orientato (con primo estremo A) equivalente ad OB, si definisce $OA+OB = OC$. Equivalentemente, si definsce $OA + OB$ come la diagonale uscente da O del parallelogramma individuato da OA e OB.

Proposizione. L'operazione di somma di vettori possiede le seguenti proprietà

(1) [vettore nullo] $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$

(2) [vettore opposto] $\mathbf{v} + (-\mathbf{v}) = \mathbf{0}$

(3) [commutatività] $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$

(4) [associatività] $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$.

Definizione di prodotto di scalari per vettori. Il prodotto di uno scalare $a \neq 0$ per un vettore non nullo OA è il vettore $aOA = OP$ che ha lunghezza uguale al prodotto di $|a|$ (valore assoluto di a) per la lunghezza di OA, che sta sulla stessa retta di OA, e che ha verso uguale od opposto ad OA secondo che sia $a > 0$ oppure $a < 0$; il prodotto di uno scalare a per un vettore OA con a oppure OA nulli è il vettore nullo $\mathbf{0}$.

Proposizione. Le operazioni di somma di scalari, di prodotto di scalari, di somma di vettori, e di prodotto di scalari per vettori son legate dalle proprietà

(5) $a(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = a\mathbf{u} + a\mathbf{v}$

(6) $(a + b)\mathbf{u} = a\mathbf{u} + b\mathbf{u}$

(7) $a(b\mathbf{u}) = (ab)\mathbf{u}$

(8) $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$

Definizione. L'insieme $\mathcal{V}_O^2$, con le operazioni di somma di vettori e di prodotto di scalari per vettori, si dice "spazio vettoriale dei vettori del piano centrati in O". In modo analogo si definiscono lo "spazio vettoriale $\mathcal{V}_O^1$ dei vettori della retta centrati in O" e lo "spazio vettoriale $\mathcal{V}_O^3$ dei vettori dello spazio centrati in O". Queste strutture si dicono "spazi vettoriali geometrici."

Definizione. Uno "spazio vettoriale" su $\mathbb{R}$ è un insieme $\mathcal{V}$ di elementi, detti "vettori", con

(a) un'operazione di somma, che a partire da due vettori dà un vettore, (b) un'operazione di prodotto per scalari, che a partire da uno scalare ed un vettore dà un vettore, (c) un elemento detto "vettore nullo" indicato con $\mathbf{0}$, (d) per ciascun vettore $\mathbf{v}$ un vettore detto "vettore opposto" di $\mathbf{v}$ ed indicato con $-\mathbf{v}$

tale che siano soddisfatte le proprietà (1), (2), ..., (8) di sopra.

Proprietà delle operazioni. Commenti. La proprietà del vettore nullo, la proprietà del vettore opposto, e la commutatività della somma di vettori seguono direttamente dalla definizione.

Ci sono due modi di sommare tre vettori OP_1, OP_2 e OP_3, mantenendo l'ordine: $(OP_1+OP_2)+OP_3$ e $OP_1+(OP_2+OP_3)$. A ciascuno di questi modi corrisponde una costruzione; la proprietà associativa afferma che le due costruzioni danno lo stesso risultato. La prima costruzione è la seguente. Dati OP_1, OP_2 e OP_3, sia P_1Q_2 equivalente a OP_2 e sia Q_2Q_3 equivalente a OP_3, allora $(OP_1 + OP_2) + OP_3 = OQ_2 + OP_3 = OQ_3$. Si lascia come compito verificare la proprietà associativa in un caso significativo, graficamente.

Differenza di due vettori, I. Dati due vettori OA e OB, si ha che esiste uno ed un solo vettore OX tale che $OA + OX = OB$; specificamente, OX è il segmento orientato per O equivalente ad AB. Questo vettore si dice "differenza" di OB meno OA e si scrive $OB - OA$.

Differenza di due vettori, II. La differenza di due vettori si può ricavare anche usando le proprietà della somma di vettori, come segue.

$$\begin{aligned} OA + OX &= OB && \text{implica} \\ -OA + (OA + OX) &= -OA + OB && \text{equivale a} \\ (-OA + OA) + OX &= -OA + OB && \text{equivale a} \\ OO + OX &= -OA + OB && \text{equivale a} \\ OX &= -OA + OB; \end{aligned}$$

questa è l'unica possibile soluzione; ed è una soluzione in quanto

$$OA + (-OA + OB) = OB.$$

Si lascia come compito verificare in un caso significativo, graficamente, che le costruzioni della differenza date nel punto precedente e in queto punto coincidono.

Rappresentazione vettoriale di un piano. In $\mathcal{E}$ (uno fra $\mathcal{E}^2$ ed $\mathcal{E}^3$) sia fissato un punto O. Siano dati due punti P_1 e P_2 non allineati con O, e sia π il piano per O, P_1 e P_2. Considero i vettori OP dati dall'espressione

$$OP = aOP_1 + bOP_2$$

al variare degli scalari a, b in $\mathbb{R}$.

Osservo che per ciascun a e b in $\mathbb{R}$ si ha: aOP_1 sta sulla retta di O e P_1 e dunque sta sul piano π, bOP_2 sta sulla retta di O e P_2 e dunque sta sul piano π, $OP = aOP_1 + bOP_2$ è la diagonale del parallelogramma di lati aOP_1 e bOP_2 e dunque sta sul piano π; in particolare, $P \in \pi$. Vale il viceversa. Lo mostro usando la proiezione su una retta parallelamente a un'altra.

Definizione. Siano r_1 ed r_2 due rette del piano incidenti in un (e un solo) punto O. Per ogni punto P del piano, la retta per P parallela ad r_2 interseca r_1 in uno ed un solo punto P_1', che si dice "proiezione di P su r_1 parallelamente ad r_2", e analogamente la retta per P parallela ad r_1 interseca r_2 in uno ed un solo punto P_2', che si dice "proiezione di P su r_2 parallelamente ad r_1". Si osserva che OP_1', $P_2'P$, OP_2', $P_1'P$ sono i lati di un parallelogramma.

Ritorno alla notazione di sopra. Indico con r_1 la retta per O e P_1 e con r_2 la retta per O e P_2. Per ogni punto $P \in \pi$, si ha

$$OP = OP_1' + OP_2',$$

dove OP_1' è la proiezione di P su r_1 secondo r_2 e OP_2' è la proiezione di P su r_2 secondo r_1; dunque, esiste un $a \in \mathbb{R}$ tale che $OP_1' = aOP_1$ ed esiste un $b \in \mathbb{R}$ tale che $OP_2' = bOP_2$; dunque si ha

$$OP = aOP_1 + bOP_2.$$

Rappresentazione vettoriale dello spazio. In $\mathcal{E}^3$ sia fissato un punto O. Siano dati tre punti P_1, P_2, P_3 non complanari con O. Allora per ogni punto P esistono degli scalari a, b, c in $\mathbb{R}$ tali che

$$OP = aOP_1 + bOP_2 + cOP_2.$$

Lo mostro usando la proiezione su una retta parallelamente a un piano.

Definizione. Siano π ed r un piano e una retta incidenti in un (e un solo) punto O. Per ogni punto P, la retta per P parallela ad r interseca π in uno ed un solo punto P_1', che si dice "proiezione di P su π parallelamente ad r", e il piano per P parallelo a π interseca r in uno ed un solo punto P_2', che si dice "proiezione di P su r parallelamente ad pi". Si osserva che OP_1', $P_2'P$, OP_2', $P_1'P$ sono i lati di un parallelogramma.

Ritorno alla notazione di sopra. Indico con π il piano per O, P_1, P_2 e con r la retta per O e P_3. Per ogni punto P, si ha

$$OP = OP_1' + OP_2',$$

dove OP_1' è la proiezione di P su π secondo r e OP_2' è la proiezione di P su r secondo π; dunque, esistono $a, b \in \mathbb{R}$ tali che $OP_1' = aOP_1 + bOP_2$ ed esiste un $c \in \mathbb{R}$ tale che $OP_2' = cOP_3$; dunque si ha

$$OP = aOP_1 + bOP_2 + cOP_3.$$