Lezione del 20.09. Alcuni argomenti in dettaglio.

Notazioni. In $\mathcal{V}_O^3$. Per ciascuna retta r passante per O, indico con $\mathcal{V}_O^r$ l'insieme dei vettori applicati in O che stanno sulla retta r. Per ciascun piano π passante per O, indico con $\mathcal{V}_O^\pi$ l'insieme dei vettori applicati in O che stanno sul piano π. In simboli:

$$\mathcal{V}_O^r = \{OP|\ P \in r\} \quad (r \text{ retta per } O)$$
$$\mathcal{V}_O^\pi = \{OP|\ P \in \pi\} \quad (\pi \text{ piano per } O).$$

Sottospazi.

Definizione. Sia $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{V}$ un sottinsieme non vuoto di uno spazio vettoriale $\mathcal{V}$. Si dice che $\mathcal{W}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathcal{V}$, in breve un sottospazio di $\mathcal{V}$, se W è chiuso rispetto alle operazioni vettoriali di $\mathcal{V}$, cioè:

(1) per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{W}$, anche $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in \mathcal{W}$;

(2) per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ ed ogni $\mathbf{u} \in \mathcal{W}$, anche $\alpha\mathbf{u} \in \mathcal{W}$.

Proposizione. I sottospazi di $\mathcal{V}_O^3$ sono tutti e soli i seguenti insiemi: (0) l'insieme $\{\mathbf{0}\}$ che ha come solo elemento il vettore nullo; (1) gli insiemi $\mathcal{V}_O^r$ ottenuti al variare di r fra le rette per O; (2) gli insiemi $\mathcal{V}_O^\pi$ ottenuti al variare di π fra i piani per O; (3) l'insieme totale $\mathcal{V}_O^3$.

Notazione. In uno spazio vettoriale $\mathcal{V}$, dati un vettore $\mathbf{v}$ ed un sottinsieme non vuoto $\mathcal{W}$, indico con $\mathbf{v}+\mathcal{W}$ l'insieme dei vettori ottenuti sommando $\mathbf{v}$ con un vettore variabile in $\mathcal{W}$; in simboli:

$$\mathbf{v} + \mathcal{W} = \{\mathbf{v} + \mathbf{w};\ \mathbf{w} \in \mathcal{W}\}.$$

Osservazione. Per ogni retta r non passante per O, l'insieme $\mathcal{V}_O^r = \{OP|\ P \in r\}$ non è un sottospazio di $\mathcal{V}_O^3$; per ogni piano π non passante per O, l'insieme $\mathcal{V}_O^\pi = \{OP|\ P \in \pi\}$ non è un sottospazio di $\mathcal{V}_O^3$. Comunque, questi insiemi si possono ottenere da sottospazi nel modo seguente

$$\mathcal{V}_O^r = OQ + \mathcal{V}_O^{r*} \qquad (\text{dove } r* \text{ retta : } r* \parallel r,\ O \in r*;\ Q \in r)$$
$$\mathcal{V}_O^\pi = OQ + \mathcal{V}_O^{\pi*} \qquad (\text{dove } \pi* \text{ piano : } \pi* \parallel \pi,\ O \in \pi*;\ Q \in \pi)$$

Si lascia per compito di motivare la prima di queste due uguaglianze.

Combinazioni lineari, sottospazio generato da dati vettori.

Definizione. Sia $\mathcal{V}$ uno spazio vettoriale. La "combinazione lineare" di n dati vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ di $\mathcal{V}$ con n dati coefficienti $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ in $\mathbb{R}$ è il vettore

$$\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_n\mathbf{v}_n.$$

Proposizione. L'insieme di tutte le combinazioni lineari di n dati vettori di $\mathcal{V}$ è un sottospazio di $\mathcal{V}$, detto "sottospazio generato" dagli n vettori dati. Indicati i vettori con $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$, questo sottospazio si indica con $\mathrm{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$. Dunque:

$$\mathrm{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\} = \{\ \alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_n\mathbf{v}_n|\ \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}\}.$$

Commento. È chiaro che $\mathrm{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ contiene ciascuno dei vettori dati; ad esempio, il primo vettore $\mathbf{v}_1$ si può ottenere come $\mathbf{v}_1 = 1\mathbf{v}_1 + 0\mathbf{v}_2 + \cdots + 0\mathbf{v}_n$. È pure chiaro che $\mathrm{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ è un sottospazio. Certamente è non vuoto. Inoltre è chiuso rispetto alle operazioni di spazio vettoriale. Mostro che è chiuso rispetto alla somma. Per ogni due combinazioni lineari di $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ si ha che anche la loro somma è una combinazione lineare di $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$; infatti

$$\alpha_1\mathbf{v}_1+\alpha_2\mathbf{v}_2+\cdots+\alpha_n\mathbf{v}_n+\beta_1\mathbf{v}_1+\beta_2\mathbf{v}_2+\cdots+\beta_n\mathbf{v}_n = (\alpha_1+\beta_1)\mathbf{v}_1+(\alpha_2+\beta_2)\mathbf{v}_2+\cdots+(\alpha_n+\beta_n)\mathbf{v}_n.$$

Si lascia per compito mostrare che vale anche la proprietà di chiusura rispetto alla moltiplicazione per numeri reali.

In $\mathcal{V}_O^3$. Per ogni vettore $\mathbf{v}_1$ non nullo, indicata con r la retta che lo contiene, si ha

$$\mathcal{V}_O^r = \mathrm{Span}(\mathbf{v}_1);$$

per ogni due vettori $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ non allineati, indicato con π il piano che li contiene, si ha

$$\mathcal{V}_O^\pi = \mathrm{Span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2);$$

per ogni tre vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ non complanari, si ha

$$\mathcal{V}_O^3 = \mathrm{Span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3).$$

Vettori linearmente indipendenti

In $\mathcal{V}_O^3$. Osservazioni. Le nozioni di non degeneratezza, come il non allineamento di due vettori o la non complanarità di tre vettori si possono esprimere nei termni dell'algebra vettoriale come segue.

(2) Se due vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ non sono allineati, allora l'uguaglianza

$$\alpha\mathbf{v}_1 + \beta\mathbf{v}_2 = \mathbf{0} \quad (\alpha, \beta \text{ scalari; } \mathbf{0} \text{ vettore nullo})$$

vale solo per $\alpha = \beta = 0$. Infatti: l'uguaglianza $\alpha\mathbf{v}_1 + \beta\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$ implica che il vettore $\beta\mathbf{v}_2$ stia sia sulla retta generata da $\mathbf{v}_2$ che sulla retta generata da $\mathbf{v}_1$; essendo queste due rette incidenti solo nel punto O, deve essere $\beta\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$; essendo $\mathbf{v}_2 \neq \mathbf{0}$ deve essere $\beta = 0$. Dunque l'uguaglianza diviene $\alpha\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$; essendo $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0}$ deve essere $\alpha = 0$.

(2') Se due vettori $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ sono allineati, allora esistono due scalari α^*, β^* non entrambi nulli tali che $\alpha^*\mathbf{v}_1+\beta^*\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$. Infatti: se $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0}$ allora $\mathbf{v}_2$ deve stare sulla retta generata da $\mathbf{v}_1$, dunque $\mathbf{v}_2 = \alpha\mathbf{v}_1$ per qualche $\alpha \in \mathbb{R}$; questa uguaglianza implica l'uguaglianza $(-\alpha)\mathbf{v}_1 + 1\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$; se $\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$, allora si ha l'uguaglianza $1\mathbf{v}_1 + 0\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$.

(3) Se tre vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ non sono complanari, allora l'uguaglianza

$$\alpha\mathbf{v}_1 + \beta\mathbf{v}_2 + \gamma\mathbf{v}_3 = \mathbf{0} \quad (\alpha, \beta, \gamma \text{ scalari; } \mathbf{0} \text{ vettore nullo})$$

vale solo per $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Infatti: l'uguaglianza $\alpha\mathbf{v}_1 + \beta\mathbf{v}_2 + \gamma\mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$ implica che il vettore $\gamma\mathbf{v}_3$ stia sia sulla retta generata da $\mathbf{v}_3$ che sul piano generato da $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$; essendo questa retta e questo piano incidenti solo nel punto O, deve essere $\gamma\mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$; essendo $\mathbf{v}_3 \neq \mathbf{0}$ deve essere $\gamma = 0$. L'uguaglianza diviene allora $\alpha\mathbf{v}_1 + \beta\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$, ed essendo $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ non allineati si deve avere $\alpha = \beta = 0$.

(3') Se tre vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ sono complanari, allora esistono tre scalari $\alpha^*, \beta^*, \gamma^*$ non tutti nulli tali che $\alpha^*\mathbf{v}_1 + \beta^*\mathbf{v}_2 + \gamma^*\mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$. Considero solo il caso in cui $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ non sono allineati. In questo caso $\mathbf{v}_3$ deve stare sul piano generato da $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$, dunque $\mathbf{v}_3 = \alpha\mathbf{v}_1 + \beta\mathbf{v}_2$ per qualche $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$; questa uguaglianza implica l'uguaglianza $(-\alpha)\mathbf{v}_1 + (-\beta)\mathbf{v}_1 + 1\mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$.

Definizione. Siano $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ vettori di uno spazio vettoriale $\mathcal{V}$. Se l'uguaglianza

$$\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0} \quad (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \textit{ scalari; } \mathbf{0} \textit{ vettore nullo})$$

vale solo per $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$, *allora si dice che* $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ *sono "linearmente indipendenti". Se al contrario esistono degli scalari* $\alpha_1^*, \alpha_2^*, \ldots, \alpha_n^*$ *non tutti nulli tali che*

$$\alpha_1^*\mathbf{v}_1 + \alpha_2^*\mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_n^*\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$$

allora si dice che $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ *sono "linearmente dipendenti".*

Basi e Coordinate.

Definizione. Si dice che la sequenza di vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ *è una base di un sottospazio* $\mathcal{W}$ *di uno spazio vettoriale* $\mathcal{V}$ *se: (1)* $\mathrm{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\} = \mathcal{W}$; *(2)* $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ *sono linearmente indipendenti.*

Proposizione. Sia $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ una base di un sottospazio $\mathcal{W}$; allora ogni $\mathbf{v} \in \mathcal{W}$ si può scrivere in uno ed un solo modo come

$$\mathbf{v} = \alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_n\mathbf{v}_n;$$

gli scalari $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ si dicono "coordinate" di $\mathbf{v}$ rispetto alla base $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$.

Motivazione della proposizione. $\mathbf{v}$ si può scrivere in almeno un modo come combinazione lineare di $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ in quanto $\mathbf{v} \in \mathcal{W}$ e $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ generano $\mathcal{W}$; consideriamo due scritture possibilmente diverse

$$\mathbf{v} = \alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_n\mathbf{v}_n$$
$$\mathbf{v} = \beta_1\mathbf{v}_1 + \beta_2\mathbf{v}_2 + \cdots + \beta_n\mathbf{v}_n;$$

sottraendo dalla seconda uguaglianza la prima uguaglianza ed usando le proprietà delle operazioni vettoriali si ha

$$\mathbf{0} = (\beta_1 - \alpha_1)\mathbf{v}_1 + (\beta_2 - \alpha_2)\mathbf{v}_2 + \cdots + (\beta_n - \alpha_n)\mathbf{v}_n;$$

essendo $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ linearmente indipendenti si deve avere $\beta_1 - \alpha_1 = \beta_2 - \alpha_2 = \cdots = \beta_n - \alpha_n = 0$; dunque $\beta_1 = \alpha_1,\ \beta_2 = \alpha_2,\ \ldots,\ \beta_n = \alpha_n$.

In $\mathcal{V}_O^3$. Ogni vettore $\mathbf{v}_1$ linearmente indipendente è una base del sottospazio $\mathcal{V}_O^r$, dove r è la retta che contiene $\mathbf{v}_1$; ogni sequenza di due vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ linearmente indipendenti è una base del sottospazio $\mathcal{V}_O^\pi$, dove π è il piano che contiene $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$; ogni sequenza di tre vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ linearmente indipendenti è una base di $\mathcal{V}_O^3$.