Lezione del 26.09. Alcuni argomenti in dettaglio.

Dimensione. Nello spazio vettoriale geometrico $\mathcal{V}_o^2$ abbiamo visto che ogni coppia di due vettori non allineati è una base; si prova che tutte le basi di $\mathcal{V}_0^2$ sono di questo tipo, in particolare hanno tutte due vettori. Analogamente, tutte le basi di $\mathcal{V}_o^3$ sono costiuite da tre vettori (non complanari). In generale si prova (in modo non banale) il seguente

Teorema. Sia $\mathcal{V}$ uno spazio vettoriale che possiede una base di n vettori (n intero non negativo); allora tutte le basi di $\mathcal{V}$ consistono di n vettori. Si dice allora che $\mathcal{V}$ ha "dimensione" n e si scrive $\dim(\mathcal{V}) = n$.

Esempi. Si ha

$$\dim(\{\mathbf{0}\}) = 0,\ \dim(\mathcal{V}_o^1) = 1,\ \dim(\mathcal{V}_o^2) = 2,\ \dim(\mathcal{V}_o^3) = 3;$$

per i sottospazi propri di $\mathcal{V}_o^3$ si ha

$$\dim(\mathcal{V}_o^r) = 1,\ (r \text{ retta per } O),\ \dim(\mathcal{V}_o^\pi) = 2,\ (\pi \text{ piano per } O).$$

Applicazione. Dato un cubo, si considerino la diagonale maggiore e due delle diagonali minori uscenti da uno stesso vertice; provare che la diagonale maggiore non sta sul piano delle due diagonali minori.
Soluzione. Sia O un vertice del cubo; alla diagonale maggiore e a due diagonali minori uscenti da O corrispondono tre vettori $\mathbf{f}, \mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2$ applicati in O. Ai tre lati del cubo incidenti con O corrispondono tre vettori $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ applicati in O, che sono una base di $\mathcal{V}_o^3$. Si ha $\mathbf{f} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$; posso pensare che $\mathbf{d}_1 = \mathbf{i} + \mathbf{k}$ e $\mathbf{d}_2 = \mathbf{j} + \mathbf{k}$.
$\mathbf{f}$ sta sul piano di $\mathbf{d}_1$ e $\mathbf{d}_2$ se e solo se $\mathbf{f} \in \mathrm{Span}\{\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2\}$ cioè se e solo se esistono $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tali che

$$\mathbf{f} = \alpha\mathbf{d}_1 + \beta\mathbf{d}_2; \quad \text{cioè} \quad \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k} = \alpha(\mathbf{i} + \mathbf{k}) + \beta(\mathbf{j} + \mathbf{k}).$$

Per l'unicità della scittura di un vettore rispetto ad una base, si ha $1 = \alpha;\ 1 = \beta; 1 = \alpha + \beta$; queste condizioni sono incompatibili. Dunque $\mathbf{f}$ non sta sul piano di $\mathbf{d}_1$ e $\mathbf{d}_2$.

Angoli. Ambiente: piano euclideo $\mathcal{E}^2$ (fino ad avviso contrario).

Per ogni due punti A e B indico con $\bar{AB}$ il segmento di estremi A e B. Dico che un sottinsieme $\mathcal{S}$ del piano è "convesso" se per ogni due punti A e B in $\mathcal{S}$ il segmento $\bar{AB}$ è contenuto in $\mathcal{S}$. Fisso d'ora in poi un segmento unità di misura; indico con $|\bar{AB}|$ il numero reale misura del segmento $\bar{AB}$ rispetto all'unità fissata.

Angolo. Fra le varie nozioni di angolo (alcune solo verbalmente diverse, altre proprio diverse), ne considero una. Dico "angolo" un insieme di due semirette aventi origine comune; dico angolo nullo un insieme di due semirette coincidenti, ed angolo piatto un insieme di due semirette opposte; indico con $\widehat{rs}$ l'angolo dato da due semirette r ed s.

Misura di un angolo. Siano r ed s due semirette con origine comune in un punto O, non allineate; rimuovendo r ed s dal piano si hanno due parti di piano, una ed una sola delle quali è convessa; la circonferenza di centro O avente raggio unitario interseca questa parte di piano, r ed s incluse, secondo un arco; dico che la lunghezza di questo arco è la misura (in radianti) dell'angolo $\widehat{rs}$. Dico misura dell'angolo piatto il numero π (pi greco) misura della semicirconferenza di raggio unitario; dico misura dell'angolo nullo il numero 0. Si ha dunque, in ogni caso, che la misura di un angolo varia fra 0

e π. Secondo l'uso comune, identifico un angolo con la sua misura; quindi ad esempio per due rette r ed s opposte, cioè per un angolo piatto, scrivo $\widehat{rs} = \pi$.
Fatto. La misura di un angolo non dipende dalla unità di misura fissata.

Coseno di un angolo. Siano r ed s due semirette con origine comune in un punto O; il segmento unitario OS sulla semiretta s ha una proiezione ortogonale OS' sulla retta individuata da r; dico "coseno" dell'angolo $\widehat{rs}$ ed indico con $\cos\widehat{rs}$ il numero reale che ha valore assoluto la misura del segmento OS' e segno positivo o negativo secondo che OS' sia contenuto in r o nella sua semiretta opposta. Secondo l'uso di identifiacre un angolo con la sua misura, si ha dunque ad esempio

$$\cos(0) = 1,\ \cos(\pi/4) = \sqrt{2}/2,\ \cos(\pi/2) = 0,\ \cos(3\pi/4) = -\sqrt{2}/2,\ \cos(\pi) = -1.$$

Analoghe nozioni si danno nello spazio euclideo $\mathcal{E}^3$ (due semirette r ed s non allineate aventi origine comune in un punto O si considerano nell'ambiente dato dal piano che le contiene).

Vettori, versori e semirette. In $\mathcal{V}_o^3$, fissato un segmento unità di misura. Indico con $\|\mathbf{v}\|$ la misura del segmento associato al vettore $\mathbf{v}$; se $\|\mathbf{v}\| = 1$ dico che $\mathbf{v}$ è un "versore". Ogni vettore non nullo OP_1 determina una semiretta con origine O, che si può descrivere come

$$\{P :\ OP = \alpha OP_1,\ \alpha \geq 0\}.$$

Viceversa, ogni semiretta con origine O determina un insieme di vettori non nulli, che si ottengono l'uno dall'altro per moltiplicazione di numeri reali positivi; fra questi vettori c'è uno ed un solo versore. Dico angolo fra due vettori non nulli l'angolo dato dalle corrispondenti semirette, e dico coseno dei due vettori il coseno di questo angolo.

Prodotto scalare. In $\mathcal{V}_o^2$, fissato un segmento unità di misura.

Definizione. Il prodotto scalare $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ di due vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ non nulli è il numero reale

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| \cos(\widehat{\mathbf{uv}});$$

il prodotto scalare di due vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ uno almeno dei quali nullo è il numero 0.

In particolare, per due vettori non nulli si ha che

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \begin{cases} \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| & \text{se } \widehat{\mathbf{uv}} = 0 \\ 0 & \text{se } \widehat{\mathbf{uv}} = \pi/2 \\ -\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| & \text{se } \widehat{\mathbf{uv}} = \pi. \end{cases}$$

Proposizione. L'operazione prodotto scalare di due vettori è legata alle operazioni di somma di due vettori e di prodotto di uno scalare per un vettore dalle seguenti proprietà

$$\begin{aligned} (\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) \cdot \mathbf{v} &= \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{v} \\ \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) &= \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}_1 + \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}_2 \\ (\alpha\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} &= \alpha(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot (\alpha\mathbf{v}); \end{aligned}$$

inoltre, il prodotto scalare è commutativo:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}.$$

I prodotti scalari si ottengono da lunghezze ed angoli; viceversa, lunghezze ed angoli si possono ricavare dai prodotti scalari. Specificamente,

$$\text{da} \quad \mathbf{u}\cdot\mathbf{u} = \|\mathbf{u}\|^2 \quad \text{si ricava} \quad \|\mathbf{u}\| = \sqrt{\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}};$$

e dunque dalla definizine si ricava

$$\cos\widehat{\mathbf{u}\mathbf{v}} = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\sqrt{\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}}\sqrt{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}}}.$$

Applicazione. Dato un cubo unitario, determinare l'angolo fra due diagonali minori uscenti da uno stesso vertice.
Soluzione. Sia O un vertice del cubo; ai tre lati del cubo incidenti con O corrispondono tre vettori $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ applicati in O, che hanno lunghezza unitaria e sono a due a due ortogonali; i prodotti scalari di questi vettori sono

$$\mathbf{i}\cdot\mathbf{i} = \mathbf{j}\cdot\mathbf{j} = \mathbf{k}\cdot\mathbf{k} = 1, \quad \mathbf{i}\cdot\mathbf{j} = \mathbf{i}\cdot\mathbf{k} = \mathbf{j}\cdot\mathbf{k} = 0.$$

Le diagonali minori del cubo corrispondono i tre vettori $\mathbf{d}_1 = \mathbf{i}+\mathbf{j}$, $\mathbf{d}_2 = \mathbf{i}+\mathbf{k}$, $\mathbf{d}_3 = \mathbf{j}+\mathbf{k}$. I prodotti scalari fra vettori $\mathbf{d}_1$ e $\mathbf{d}_2$ sono

$$\begin{aligned}
\mathbf{d}_1\cdot\mathbf{d}_1 &= (\mathbf{i}+\mathbf{j})\cdot(\mathbf{i}+\mathbf{j}) = 1+0+0+1 = 2\\
\mathbf{d}_1\cdot\mathbf{d}_2 &= (\mathbf{i}+\mathbf{j})\cdot(\mathbf{j}+\mathbf{k}) = 0+0+1+0 = 1\\
\mathbf{d}_2\cdot\mathbf{d}_2 &= \ldots = 2
\end{aligned}$$

Dunque si ha

$$\|\mathbf{d}_1\| = \sqrt{\mathbf{d}_1\cdot\mathbf{d}_1} = \sqrt{2}; \quad \|\mathbf{d}_2\| = \sqrt{2}; \quad \cos\widehat{\mathbf{d}_1\mathbf{d}_2} = \frac{\mathbf{d}_1\cdot\mathbf{d}_2}{\sqrt{\mathbf{d}_1\cdot\mathbf{d}_1}\sqrt{\mathbf{d}_2\cdot\mathbf{d}_2}} = \frac{1}{2};$$

ne segue che $\widehat{\mathbf{d}_1\mathbf{d}_2} = \pi/3$.

Compito. Dato un cubo unitario, determinare l'angolo fra la diagonale maggiore e una diagonale minore uscenti da uno stesso vertice.

Aree e prodotto vettoriale. In $\mathcal{V}_o^3$.

Informalmente, si dice che una terna ordinata di vettori $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ è "destrorsa" se, a meno di un cambio di lunghezze (ma non di verso), si può sovrapporre ad essa la terna ordinata delle dita pollice, indice, e medio della mano destra. Analogamente per la nozione di terna sinistrorsa.

Fatto. Ogni terna di vettori non complanari è di uno ed uno solo di questi due tipi; scambiando due vettori, si passa da una terna di un tipo ad una terna dell'altro tipo.

Definizione. Il prodotto vettoriale di un vettore $\mathbf{u}$ per un vettore $\mathbf{v}$, non allineati, è il vettore $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ caratterizzato dalle seguenti condizioni:
(1) $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ ha lunghezza uguale all'area del parallelogramma individuato da $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$;
(2) $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ è ortogonale al piano individuato da $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$;
(3) $\mathbf{u}, \mathbf{v}$, $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ è una terna destrorsa.
Il prodotto vettoriale di un vettore $\mathbf{u}$ per un vettore $\mathbf{v}$, allineati, è $\mathbf{u}\times\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

Esempio. Sia $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ una terna destrorsa di versori a due a due ortogonali. Allora la tabella dei prodotti vettoriali di questi vettori è data da

	$\mathbf{i}$	$\mathbf{j}$	$\mathbf{k}$
$\mathbf{i}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{k}$	$-\mathbf{j}$
$\mathbf{j}$	$-\mathbf{k}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{i}$
$\mathbf{k}$	$\mathbf{j}$	$-\mathbf{i}$	$\mathbf{0}$

Proposizione. Il prodotto vettoriale è legato alle operazioni di somma di vettori e di prodotto di scalari per vettori dalle seguenti proprietà

$$(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) \times \mathbf{v} = \mathbf{u}_1 \times \mathbf{v} + \mathbf{u}_2 \times \mathbf{v}$$
$$\mathbf{u} \times (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = \mathbf{u} \times \mathbf{v}_1 + \mathbf{u} \times \mathbf{v}_2$$
$$(\alpha\mathbf{u}) \times \mathbf{v} = \alpha(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{u} \times (\alpha\mathbf{v})$$

inoltre, è anticommutativo:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -\mathbf{v} \times \mathbf{u}.$$

Commento. Le prime due proprietà non sono ovvie; la terza e la quarta sono piuttosto evidenti.

Esercizio. Dato un cubo di lato unitario, siano O e F due vertici opposti; fra i sei lati non incidenti né a O né a F si scelgano due lati paralleli e siano A_1 ed A_2 i loro punti medi. Usando l'algebra dei vettori, si provi che O, A_1, F, A_2 sono i vertici di un parallelogramma e di questo si calcoli l'area.

Soluzione. Considero lo spazio vettoriale $\mathcal{V}_o^3$ dei vettori dello spazio applicati in O e pongo $OA_1 = \mathbf{a}_1$, $OA_2 = \mathbf{a}_2$, $OF = \mathbf{f}$; provare che O, A_1, F, A_2 sono i vertici di un parallelogramma equivale a provare che $\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 = \mathbf{f}$; l'area del parallelogramma è $\|\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2\|$.
Considero la terna di versori $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ associati ai lati del cubo incidenti O, tale che $\mathbf{i}$ sia incidente al lato di A_1, $\mathbf{j}$ sia incidente al lato di A_2, e dunque $\mathbf{k}$ sia parallelo al lato di A_1 e al lato di A_2; suppongo per semplicità che questa terna sia destrorsa. Si ha

$$\mathbf{a}_1 = \mathbf{i} + (1/2)\mathbf{k}, \quad \mathbf{a}_2 = \mathbf{j} + (1/2)\mathbf{k}, \quad \mathbf{f} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}.$$

Da ciò segue subito che $\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 = \mathbf{f}$. Si ha

$$\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 = (\mathbf{i} + (1/2)\mathbf{k}) \times (\mathbf{j} + (1/2)\mathbf{k}) = \mathbf{k} - (1/2)\mathbf{j} - (1/2)\mathbf{i}.$$

Dunque l'area del parallelogramma è

$$\begin{aligned}\|\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2\| &= \|\mathbf{k} - (1/2)\mathbf{j} - (1/2)\mathbf{i}\| \\ &= \sqrt{(\mathbf{k} - (1/2)\mathbf{j} - (1/2)\mathbf{i}) \cdot (\mathbf{k} - (1/2)\mathbf{j} - (1/2)\mathbf{i})} \\ &= \sqrt{1 + 1/4 + 1/4} = \sqrt{3/2}.\end{aligned}$$

Commento. Tutti e tre le applicazioni viste dell'algebra dei vettori alla risoluzione di problemi geomtrici servono appunto per mostrare tale algebra all'opera. I problemi geometrici in sè possono essere risolti direttamente e più velocemente con argomenti elementari. Succede però che varianti più complesse del problema possono essere risolte con lo stesso procedimento algebrico, mentre possono richiedere un procedimento geometrico sensibilmente meno elementare.