Lezione del 27.09. Alcuni argomenti in dettaglio.

**Spazio vettoriale numerico $\mathbb{R}^2$**

Nozioni e notazioni. Insieme $\mathbb{R}^2$ delle coppie ordinate $(x, y)$ di numeri reali $x, y$; si intende che $(x, y) = (x', y')$ se e solo se $x = x'$ e $y = y'$. Ciascuna coppia ordinata $(x, y)$ viene preferibilmente indicata con una colonna a due componenti e viene detta "vettore numerico". Si indica un vettore numerico anche con un unico simbolo lettera minuscola in grassetto.

Il vettore $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ si dice vettore nullo e si indica con $\mathbf{0}$.

Ogni vettore $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ ha un vettore opposto $\begin{bmatrix} -x \\ -y \end{bmatrix}$, se si indica un vettore con $\mathbf{x}$ allora si indica il suo opposto con $-\mathbf{x}$.

Somma di vettori numerici:

$$\text{per} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \ \mathbf{x}' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \quad \text{si pone} \quad \mathbf{x} + \mathbf{x}' = \begin{bmatrix} x + x' \\ y + y' \end{bmatrix}.$$

Prodotto di uno scalare per un vettore numerico:

$$\text{per} \quad \alpha \in \mathbb{R}, \ \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2, \quad \text{si pone} \quad \alpha\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \alpha x \\ \alpha y \end{bmatrix}.$$

Fatto. L'insieme $\mathbb{R}^2$ con queste operazioni è uno spazio vettoriale (le proprietà della somma di vettori numerici e le proprietà che legano le operazioni fra numeri reali, la moltiplicazione di scalari per vettori, e la somma di vettori derivano direttamente dalle proprietà delle operazioni sui numeri reali).

Combinazioni lineari. Indipendenza lineare. Esempi. Dati

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \ \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{c} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Si ha

$$2\mathbf{a} + 3\mathbf{b} - \mathbf{c} = \ldots = \begin{bmatrix} 1 + 3\sqrt{2} \\ 3 \end{bmatrix}$$

Ci chiediamo se i vettori $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ sono linearmente indipendenti cioè se l'equazione

$$\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c} = \mathbf{0}$$

nelle incognite $\alpha, \beta, \gamma$ ha solo la soluzione $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Questa equazione in $\alpha, \beta, \gamma$ equivale al sistema di due equazioni lineari in $\alpha, \beta, \gamma$

$$\begin{cases} \sqrt{2}\beta - \gamma = 0 \\ 2\alpha + \gamma = 0 \end{cases}$$

Questo sistema ha infinite soluzioni date da $\alpha = -\gamma/2$, $\beta = \gamma/\sqrt{2}$ e $\gamma$ qualsiasi; ... dunque $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ sono linearmente dipendenti.

Commento. Il senso di questo esempio è mostrare come un'equazione fra vettori numerici equivalga ad un sistema di equazioni lineari. Più avanti mostreremo come trattare questioni sui sistemi lineari.

Compito. Stabilire se le seguenti sono basi di $\mathbb{R}^2$, usando solo la definzione di base.

(1) Il singolo vettore $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$;

(2) i vettori $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$;
(3) i vettori $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/3 \end{bmatrix}$.

**Base canonica** La coppia di vettori

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ha le seguenti proprietà: genera $\mathbb{R}^2$ in quanto ogni vettore di $\mathbb{R}^2$ si può scrivere come loro combinazione lineare:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix};$$

è linearmente indipendente. $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ è una base, detta base canonica, di $\mathbb{R}^2$.

**Identificazione degli spazi vettoriali $\mathcal{V}_o^2$ e $\mathbb{R}^2$.**
Sia $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ una base di $\mathcal{V}_o^2$ (due vettori del piano applicati nel punto $O$, non allineati). Associando a ciscun vettore geometrico in $\mathcal{V}_o^2$ il vettore numerico dato dalle sue coordinate rispetto a questa base ottengo una funzione $\mathcal{V}_o^2 \to \mathbb{R}^2$. Specificamente

$$\mathbf{v} \mapsto \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \text{se e solo se} \quad \mathbf{v} = x\mathbf{v}_1 + y\mathbf{v}_2.$$

Questa funzione $\mathcal{V}_o^2 \to \mathbb{R}^2$ è biiettiva (cioè ogni vettore numerico è l'associato di uno ed un solo vettore geometrico), ed è compatibile con le operazione vettoriali in $\mathcal{V}_o^2$ e in $\mathbb{R}^2$; specificamente:

$$\text{se} \quad \mathbf{v} \mapsto \mathbf{x}, \ \mathbf{v}' \mapsto \mathbf{x}' \quad \text{allora} \quad \mathbf{v} + \mathbf{v}' \mapsto \mathbf{x} + \mathbf{x}', \quad \text{e} \quad \alpha\mathbf{v} \mapsto \alpha\mathbf{x} \quad (\alpha \in \mathbb{R}).$$

Commento. Ogni scelta di una base di $\mathcal{V}_o^2$ fornisce una identificazione di $\mathcal{V}_o^2$ con $\mathbb{R}^2$. Dunque ogni scelta di una base permette di tradurre problemi geometrici in problemi numerici; per uno specifico problema geometrico, si cerca di scegliere una base che porti ad un problema numerico il più semplice possibile.