Lezione del 03.10. Alcuni argomenti in dettaglio.

Spazio vettoriale numerico $\mathbb{R}^3$
Nozioni e notazioni. Insieme $\mathbb{R}^3$ delle terne ordinate (x, y, z) di numeri reali x, y, z; si intende che $(x, y, z) = (x', y', z')$ se e solo se $x = x'$, $y = y'$ e $z = z'$. Ciascuna terna ordinata viene detta “vettore numerico” a tre componenti; più avanti verrà preferibilmente indicata con una colonna a tre componenti. Si indica un vettore numerico anche con un unico simbolo lettera minuscola in grassetto.
Il vettore $(0, 0, 0)$ si dice vettore nullo e si indica con $\mathbf{0}$. Ogni vettore (x, y, z) ha un vettore opposto $(-x, -y, -z)$, se si indica un vettore con $\mathbf{x}$ allora si indica il suo opposto con $-\mathbf{x}$.
Somma di vettori numerici:

$$\text{per} \quad \mathbf{x} = (x, y, z),\ \mathbf{x}' = (x', y', z'), \in \mathbb{R}^2 \quad \text{si pone} \quad \mathbf{x} + \mathbf{x}' = (x + x', y + y', z + z').$$

Prodotto di uno scalare per un vettore numerico:

$$\text{per} \quad \alpha \in \mathbb{R},\ \mathbf{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad \text{si pone} \quad \alpha\mathbf{x} = (\alpha x, \alpha y, \alpha z).$$

Fatto. L’insieme $\mathbb{R}^3$ con queste operazioni è uno spazio vettoriale (le proprietà della somma di vettori numerici e le proprietà che legano le operazioni fra numeri reali, la moltiplicazione di scalari per vettori, e la somma di vettori derivano direttamente dalle proprietà delle operazioni sui numeri reali).

Base canonica La terna di vettori

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0),\ \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0),\ \mathbf{e}_3 = (0, 0, 1),$$

ha le seguenti proprietà: genera $\mathbb{R}^3$ in quanto ogni vettore di $\mathbb{R}^3$ si può scrivere come loro combinazione lineare:

$$(x, y, z) = x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1);$$

è linearmente indipendente, in quanto

$$\alpha(1, 0, 0) + \beta(0, 1, 0) + \gamma(0, 0, 1) = (0, 0, 0) \quad \text{solo se} \quad \alpha = \beta = \gamma = 0.$$

Dunque $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ è una base, detta base canonica, di $\mathbb{R}^3$, e $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$.

Identificazione degli spazi vettoriali $\mathcal{V}_o^3$ e $\mathbb{R}^3$.
Sia $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ una base di $\mathcal{V}_o^3$ (tre vettori dello spazio applicati nel punto O, non complanari). Associando a ciscun vettore geometrico in $\mathcal{V}_o^3$ il vettore numerico dato dalle sue coordinate rispetto a questa base ottengo una funzione $\mathcal{V}_o^3 \to \mathbb{R}^3$. Specificamente

$$\mathbf{v} \mapsto (x, y, z) \quad \text{se e solo se} \quad \mathbf{v} = x\mathbf{v}_1 + y\mathbf{v}_2 + z\mathbf{v}_3.$$

Questa funzione $\mathcal{V}_o^3 \to \mathbb{R}^3$ è biiettiva (cioè ogni vettore numerico è l’associato di uno ed un solo vettore geometrico), ed è compatibile con le operazione vettoriali in $\mathcal{V}_o^3$ e in $\mathbb{R}^3$; specificamente:

$$\text{se} \quad \mathbf{v} \mapsto \mathbf{x},\ \mathbf{v}' \mapsto \mathbf{x}' \quad \text{allora} \quad \mathbf{v} + \mathbf{v}' \mapsto \mathbf{x} + \mathbf{x}', \quad \text{e} \quad \alpha\mathbf{v} \mapsto \alpha\mathbf{x} \quad (\alpha \in \mathbb{R}).$$

Compito. Provare la compatibilità della funzione rispetto alla somma.

Spazio vettoriale numerico $\mathbb{R}^n$
Nozioni e notazioni. Sia n un intero positivo fissato. Insieme $\mathbb{R}^n$ delle $n-$ple ordinate $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ di numeri reali $x_1, x_2, \ldots, x_n$; si intende che $(x_1, x_2, \ldots, x_n) =$

$(x_1', x_2', \dots, x_n')$ se e solo se $x_1 = x_1'$, $x_2 = x_2'$, ... $x_n = x_n'$. Ciascuna $n-$pla ordinata viene detta "vettore numerico" a n componenti; più avanti verrà preferibilmente indicata con una colonna a n componenti. Si indica un vettore numerico anche con un unico simbolo lettera minuscola in grassetto.
Il vettore $(0, 0, \dots, 0)$ si dice vettore nullo e si indica con $\mathbf{0}$. Ogni vettore $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ha un vettore opposto $(-x_1, -x_2, \dots, -x_n)$, se si indica un vettore con $\mathbf{x}$ allora si indica il suo opposto con $-\mathbf{x}$.
Somma di vettori numerici:

$$\text{per} \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n),\ \mathbf{x}' = (x_1', x_2', \dots, x_n'), \in \mathbb{R}^n \quad \text{si pone}$$
$$\mathbf{x} + \mathbf{x}' = (x_1 + x_1', x_2 + x_2', \dots, x_n + x_n').$$

Prodotto di uno scalare per un vettore numerico:

$$\text{per} \quad \alpha \in \mathbb{R},\ \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n), \in \mathbb{R}^n, \quad \text{si pone} \quad \alpha\mathbf{x} = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n).$$

Fatto. L'insieme $\mathbb{R}^n$ con queste operazioni è uno spazio vettoriale (le proprietà della somma di vettori numerici e le proprietà che legano le operazioni fra numeri reali, la moltiplicazione di scalari per vettori, e la somma di vettori derivano direttamente dalle proprietà delle operazioni sui numeri reali).

Base canonica La $n-$pla di vettori

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0),\ \mathbf{e}_2 = (0, 1, \dots, 0),\ \dots,\ \mathbf{e}_n = (0, 0, \dots, 1),$$

genera $\mathbb{R}^n$ ed è linearmente indipendente; dunque $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ è una base, detta base canonica, di $\mathbb{R}^n$, e $\dim(\mathbb{R}^n) = n$.

Sistemi di riferimento e coordinate nel piano euclideo $\mathcal{E}^2$.
Siano fissati un punto O e due vettori $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ applicati in O; assumiamo che questi vettori non siano allineati, in altri termini che formino una base di $\mathcal{V}_O^2$. Associando a ciascun punto P il vettore geometrico OP si ha una funzione biiettiva $\mathcal{E}^2 \to \mathcal{V}_O^2$; associando a ciascun vettore geometrico OP la coppia ordinata (x, y) delle sue coordinate rispetto alla base $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ si ha una funzione biiettiva $\mathcal{V}_O^2 \to \mathbb{R}^2$; dunque associando a ciascun punto P il vettore numerico (x, y) caratterizzato dalla condizione

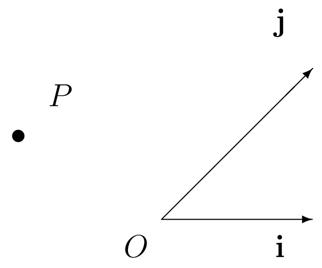
$$OP = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$$

si ha una funzione biiettiva $\mathcal{E}^2 \to \mathbb{R}^2$. Si dice che $(O; \mathbf{i}, \mathbf{j})$ è un sistema di riferimento nel piano $\mathcal{E}^2$ e che P ha coordinate (x, y) in tale sistema di riferimento; si identifica il punto P con la coppia ordinata (x, y) e in breve si scrive $P = (x, y)$.

Commento.
Una costruzione più diretta di coordinate nel piano $\mathcal{E}^2$:
Sia O un punto (punto origine) in $\mathcal{E}^2$, siano r_1, r_2 due rette (assi) distinte passanti per O, e siano U_1, U_2 due punti (punti unità) di r_1, r_2 distinti da O. Su ciascun asse il punto origine ed il punto unità determinano un sistema di riferimento, che permette di identificare i punti dell'asse con i numeri reali. Per ciascun punto P in $\mathcal{E}^2$, proiettando P sul primo asse r_1 parallelamente al secondo asse r_2 si ottiene un punto P_1 e proiettando P sul secondo asse r_2 parallelamente al primo asse r_1 si ottiene un punto P_2; al punto P_1 di r_1 corrisponde un numero reale x ed al punto P_2 corrisponde un numero reale y; si associa al punto P la coppia ordinata di numeri reali (x, y); ciascuna coppia ordinata in $\mathbb{R}^2$ si ottiene da uno ed un solo punto in $\mathcal{E}^2$.

Relazione con la costruzione data di coordinate nel piano $\mathcal{E}^2$:
Fissare un punto origine, due rette distinte passanti per esso, e due punti unità su di esse distinti dall'origine equivale a fissare un punto origine e due vettori non allineati applicati in esso. Le due costruzioni danno lo stesso risultato.
Il vantaggio della costruzione data è che permetterà di usare l'algebra dei vettori per descrivere gli oggetti geometrici.

Compito. Rispetto al sistema di riferimento $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j})$, si dia una stima delle coordinate del punto P e si rappresenti il punto di coordinate $(-1, -1/2)$.



Sistemi di riferimento e coordinate nello spazio euclideo $\mathcal{E}^3$.
Siano fissati un punto O e tre vettori $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ applicati in O; assumiamo che questi vettori non siano complanari, in altri termini che formino una base di $\mathcal{V}^3_O$. Associando a ciascun punto P il vettore geometrico OP si ha una funzione biiettiva $\mathcal{E}^3 \to \mathcal{V}^3_O$; associando a ciascun vettore geometrico OP la terna ordinata (x, y, z) delle sue coordinate rispetto alla base $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ si ha una funzione biiettiva $\mathcal{V}^3_O \to \mathbb{R}^3$; dunque associando a ciascun punto P il vettore numerico (x, y, z) caratterizzato dalla condizione

$$OP = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

si ha una funzione biiettiva $\mathcal{E}^3 \to \mathbb{R}^3$. Si dice che $(O; \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ è un sistema di riferimento nello spazio $\mathcal{E}^3$ e che P ha coordinate (x, y, z) in tale sistema di riferimento; si identifica il punto P con la terna ordinata (x, y, z) e in breve si scrive $P = (x, y, z)$.

Equazioni parametriche di rette in $\mathcal{E}^2$.
Sia $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j})$ un sistema di riferimento nel piano $\mathcal{E}^2$.

Proposizione. Sia $\mathbf{v}$ un vettore non nullo applicato in O e sia P_0 un punto in $\mathcal{E}^2$. Un punto P appartiene alla retta parallela al vettore $\mathbf{v}$ passante per il punto P_0 se e solo se

$$OP = OP_0 + tv, \quad \text{per qualche scalare } t \in \mathbb{R}.$$

Si dice che questa equazione è una "equazione parametrica vettoriale" della retta e che il vettore $\mathbf{v}$ è "un vettore direttore" della retta.
Posto $P = (x, y)$, $P_0 = (x_0, y_0)$ e $\mathbf{v} = (\ell, m)$, l'equazione parametrica vettoriale diviene

$$x\mathbf{i} + y\mathbf{j} = x_0\mathbf{i} + y_0\mathbf{j} + t(\ell\mathbf{i} + m\mathbf{j}), \quad \text{per qualche scalare } t \in \mathbb{R},$$

cioè (per l'unicità della scrittura di un vettore rispetto ad una base)

$$\begin{cases} x = x_0 + \ell t \\ y = y_0 + mt \end{cases} \qquad \text{per qualche scalare } t \in \mathbb{R}.$$

Si dice che queste equazioni sono "equazioni parametriche scalari", in breve "equazioni parametriche" della retta.

Equazioni parametriche di rette in $\mathcal{E}^3$.
Sia $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ un sistema di riferimento nello spazio $\mathcal{E}^3$.

Proposizione. Sia $\mathbf{v}$ un vettore non nullo applicato in O e sia P_0 un punto in $\mathcal{E}^3$. Un punto P appartiene alla retta parallela al vettore $\mathbf{v}$ passante per il punto P_0 se e solo se

$$OP = OP_0 + tv, \quad \text{per qualche scalare } t \in \mathbb{R}.$$

Si dice che questa equazione è una "equazione parametrica vettoriale" della retta e che il vettore $\mathbf{v}$ è "un vettore direttore" della retta.
Posto $P = (x, y, z)$, $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e $\mathbf{v} = (\ell, m, n)$, l'equazione parametrica vettoriale diviene

$$x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = x_0\mathbf{i} + y_0\mathbf{j} + z_0\mathbf{k} + t(\ell\mathbf{i} + m\mathbf{j} + n\mathbf{k}), \quad \text{per qualche scalare } t \in \mathbb{R},$$

cioè (per l'unicità della scrittura di un vettore rispetto ad una base)

$$\begin{cases} x = x_0 + \ell t \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases} \qquad \text{per qualche scalare } t \in \mathbb{R}.$$

Si dice che queste equazioni sono "equazioni parametriche scalari", in breve "equazioni parametriche" della retta.