Lezione del 11.10. Alcuni argomenti in dettaglio.

Fatto (ripresa). Nello spazio o piano o retta, con un punto fissato O; per ciascun segmento orientato AB, il vettore applicato in O equivalente ad AB è $OB - OA$.

Equazioni parametriche di rette (ripresa). Nello spazio o piano, con un punto fissato O. Sia r una retta per O e sia $\mathbf{v}$ un vettore applicato in O su r, non nullo. Allora un punto P appartiene ad r se e solo se

$$OP = t\ v \qquad \text{per qualche } \ t \in \mathbb{R}.$$

Sia r una retta per un punto P_0 e sia $\mathbf{v}$ un vettore applicato in O parallelo ad r, non nullo. Allora un punto P appartiene ad r se e solo se

$$OP = OP_0 + t\ v \qquad \text{per qualche } \ t \in \mathbb{R}$$

Questa equazione si dice "equazione parametrica" vettoriale della retta r, e $\mathbf{v}$ si dice "un vettore direttore" di r.
Fatto. Una retta con un vettore direttore $\mathbf{v}$ è parallela ad una retta con un vettore direttore $\mathbf{w}$ se e solo se $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ sono allineati se e solo se $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ sono l'uno multiplo scalare dell'altro.

Fissato un sistema di riferimento, l'equazione parametrica fra vettori geometrici si traduce in un' equazione parametrica fra vettori numerici. Nel piano, con un sistema di riferimento $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j})$, un punto $P = (x, y)$ appartiene alla retta r per il punto $P_0 = (x_0, y_0)$ parallela al vettore $\mathbf{v} = (m, n)$ se e solo se

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} \qquad \text{per qualche } \ t \in \mathbb{R};$$

questa equazione parametrica vettoriale equivale ad un sistema di due equazioni parametriche scalari. Nello spazio, con un sistema di riferimento $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$, un punto $P = (x, y, z)$ appartiene alla retta r per il punto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ parallela al vettore $\mathbf{v} = (m, n, p)$ se e solo se

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} m \\ n \\ p \end{bmatrix} \qquad \text{per qualche } \ t \in \mathbb{R};$$

questa equazione parametrica vettoriale equivale ad un sistema di tre equazioni parametriche scalari.

Equazione parametrica della retta per due punti. Nello spazio o piano, con un punto fissato O. Sia r la retta per due punti distinti P_1 e P_2; allora r ha un vettore direttore $OP_2 - OP_1$. Allora r ha equazione parametrica

$$OP = OP_1 + t(OP_2 - OP_1) \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Nel piano, con un sistema di riferimento $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j})$, un punto $P = (x, y)$ appartiene alla retta r per i punti distinti $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$ se e solo se

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{bmatrix} \qquad \text{per qualche } \ t \in \mathbb{R}.$$

Nello spazio, con un sistema di riferimento $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$, un punto $P = (x, y, z)$ appartiene alla retta r per i punti distinti $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ se e solo se soddisfa un'analoga equazione.

Esempio. Un'equazione parametrica della retta per i punti $(1, -2)$ e $(0, 1)$ è

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

che equivale al sistema di due equazioni parametriche scalari

$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = -2 + 3t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Esempio. Un'equazione parametrica della retta per i punti $(1, -2, 3)$ e $(0, 1, 2)$ è

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

che equivale al sistema di tre equazioni parametriche scalari

$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = -2 + 3t \\ z = 3 - t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Equazioni parametriche di piani. Nello spazio, con un punto fissato O. Sia π un piano per O e siano $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ due vettori applicato in O paralleli a π; supponiamo che $\mathbf{u}$ e $\mathbf{u}$ non siano allineati, cioè linearmente indipendenti. Allora un punto P appartiene al piano π se e solo se

$$OP = s\mathbf{u} + t\mathbf{v} \qquad \text{per qualche } s, t \in \mathbb{R}.$$

Sia ora π un piano per un punto P_0 e siano $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ due vettori applicati in O paralleli a π, linearmente indipendenti. Allora un punto P appartiene al piano π se e solo se

$$OP = OP_0 + s\mathbf{u} + t\mathbf{v} \qquad \text{per qualche } s, t \in \mathbb{R}.$$

Questa equazione si dice "equazione parametrica" vettoriale del piano π, e $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ si dicono "due vettori giacitura" di π.
Un piano con due vettori giacitura $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ è parallelo ad un piano con due vettori giacitura $\mathbf{u}'$ e $\mathbf{v}'$ se e solo se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono combinazione lineare di $\mathbf{u}'$ e $\mathbf{v}'$ e viceversa.

Nello spazio, con un sistema di riferimento $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$, un punto $P = (x, y, z)$ appartiene al piano π per il punto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ parallelo ai vettori linearmente indipendenti $\mathbf{u} = (a, b, c)$ e $\mathbf{v} = (d, e, f)$ se e solo se

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} d \\ e \\ f \end{bmatrix} \qquad \text{per qualche } \ s, t \in \mathbb{R}.$$

Equazione parametrica del piano per tre punti. Nello spazio, con un punto fissato O. Sia π il piano per tre punti non allineati P_1, P_2, P_3; allora π ha due vettori giacitura $OP_2 - OP_1$ e $OP_3 - OP_1$. Allora π ha equazione parametrica

$$OP = OP_1 + s(OP_2 - OP_1) + t(OP_3 - OP_1) \qquad \text{per qualche } s, t \in \mathbb{R}.$$

Nello spazio, con un sistema di riferimento $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$, un punto $P = (x, y, z)$ appartiene al piano π per i punti non allineati $P_i = (x_i, y_i, z_i)$, $i = 1, 2, 3$ se e solo se

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} x_3 - x_1 \\ y_3 - y_1 \\ z_3 - z_1 \end{bmatrix} \qquad \text{per qualche} \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

Esempio. Un'equazione parametrica del piano per i tre punti $(1, 2, 0)$, $(2, 1, 0)$, $(0, 1, 2)$ è

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad s, t \in \mathbb{R},$$

che equivale al sistema di tre equazioni parametriche scalari

$$\begin{cases} x = 1 + s - t \\ y = -2 - s - t \\ z = 2t \end{cases} \qquad s, t \in \mathbb{R}.$$

Equazioni cartesiane di rette nel piano (ripresa). Nel piano, con un punto fissato O. Sia r una retta per O e sia $\mathbf{v}$ un vettore applicato in O ortogonale ad r, non nullo. Allora un punto P appartiene ad r se e solo se OP è ortogonale a $\mathbf{v}$, cioè

$$OP \cdot \mathbf{v} = 0$$

Sia r una retta per un punto P_0 e sia $\mathbf{v}$ un vettore applicato in O ortogonale ad r, non nullo. Allora un punto P appartiene ad r se e solo se P_0P è ortogonale a $\mathbf{v}$, cioè

$$(OP - OP_0) \cdot \mathbf{v} = 0.$$

Questa equazione si dice "equazione cartesiana" della retta r, e $\mathbf{v}$ si dice "un vettore normale" di r.
Una retta con un vettore normale $\mathbf{v}$ è parallela ad una retta con un vettore normale $\mathbf{w}$ se e solo se $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ sono l'uno multiplo scalare dell'altro.
Nel piano, con un sistema di riferimento ortogonale monometrico $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j})$, un punto $P = (x, y)$ appartiene alla retta r per il punto $P_0 = (x_0, y_0)$ ortogonale al vettore $\mathbf{v} = (a, b)$ se e solo se

$$\begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = 0$$

cioè

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$$

Questa è una equazione di primo grado in x, y. Viceversa, ciascuna equazione di primo grado in x, y

$$ax + by + c = 0 \qquad (\text{con } (a, b) \neq (0, 0))$$

ha per soluzioni le coordinate dei punti di una retta, una retta ortogonale al vettore (a, b).

Equazioni cartesiane di piani nello spazio. Sia π un piano per O e sia $\mathbf{v}$ un vettore applicato in O ortogonale a π, non nullo. Allora un punto P appartiene a π se e solo se OP è ortogonale a $\mathbf{v}$, cioè

$$OP \cdot \mathbf{v} = 0$$

Sia π un piano per un punto P_0 e sia $\mathbf{v}$ un vettore applicato in O ortogonale a π, non nullo. Allora un punto P appartiene a π se e solo se P_0P è ortogonale a $\mathbf{v}$, cioè

$$(OP - OP_0) \cdot \mathbf{v} = 0.$$

Questa equazione si dice "equazione cartesiana" del piano π, e $\mathbf{v}$ si dice "un vettore normale" a π.
Un piano con un vettore normale $\mathbf{v}$ è parallelo ad un piano con un vettore normale $\mathbf{w}$ se e solo se $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ sono l'uno multiplo scalare dell'altro.
Nello spazio, con un sistema di riferimento ortogonale monometrico $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$, un punto $P = (x, y, z)$ appartiene al piano π per il punto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ ortogonale al vettore $\mathbf{v} = (a, b, c)$ se e solo se

$$\begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = 0$$

cioè

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

Questa è una equazione di primo grado in x, y, z. Viceversa, ciascuna equazione di primo grado in x, y, z

$$ax + by + cz + d = 0 \qquad (\text{con } (a, b, c) \neq (0, 0, 0))$$

ha per soluzioni le coordinate dei punti di una retta, una retta ortogonale al vettore (a, b, c).

Equazioni cartesiane di rette nello spazio. Nello spazio; fissato un punto O. Sia r una retta, P_0 un punto di r, $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ due vettori applicati in O ortogonali ad r, linearmente indipendenti. Allora un punto P appartiene alla retta r se e solo se P_0P ortogonale a $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, cio

$$\begin{cases} (OP - OP_0) \cdot \mathbf{u} = 0 \\ (OP - OP_0) \cdot \mathbf{v} = 0 \end{cases}$$

Questo sistema si dice sistema di equazioni cartesiane di r.
Fissato un sistema di riferimento ortogonale monometrico, posto $P = (x, y, z)$, $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$, $\mathbf{u} = (a, b, c)$, $\mathbf{v} = (d, e, f)$, il sistema di equazioni geometriche si traduce nel sistema di equazioni numeriche

$$\begin{cases} a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \\ d(x - x_0) + e(y - y_0) + f(z - z_0) = 0 \end{cases}$$

Questo un sistema di due equazioni di primo grado in x, y, z. Viceversa, ciascun sistema di equazioni di primo grado in x, y, z

$$\begin{cases} ax + by + cz + g = 0 \\ dx + ey + fz + h = 0 \end{cases} \qquad (\text{con } \ (a, b, c), (d, e, f) \text{ linearmente indipendenti})$$

ha per soluzioni le coordinate dei punti di una retta, una retta ortogonale ai vettori (a, b, c) e (d, e, f).

Passaggio da equazioni parametriche ad equazioni cartesiane e viceversa.

Per rette nel piano, passaggio da equazioni parametriche ad equazioni cartesiane. Dato un sistema di due equazioni parametriche di una retta, ricavando il parametro da una (opportuna) equazione e sostituendo nell'altra si ottiene un'equazione cartesiana della stessa retta. Ad esempio, dato sistema di due equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \end{cases}$$

-dalla prima equazione ricavo il parametro in funzione di x $t = x - 1$
-sostituisco nella seconda equazione, riscrivo portando tutto al primo membro ed ottengo

$$x + y - 3 = 0.$$

Osservazione Sull'equazione parametrica si legge che la retta è parallela al vettore $(1, -1)$; sull'equazione cartesiana si legge che la retta è ortogonale al vettore $(1, 1)$; questi vettori sono effettivamente ortogonali in quanto $(1, -1) \cdot (1, 1) = 1 - 1 = 0$. Sull'equazione parametrica si legge che la retta passa per il punto $(1, 2)$ e questo punto verifica l'equazione cartesiana in quanto $1 + 2 - 3 = 0$.

Per rette nel piano, passaggio da equazioni cartesiane ad equazioni parametriche. Data un'equazione cartesiana di una retta, ricavando una incognita (opportuna) in funzione dell'altra e ponendo l'altra uguale ad un parametro si ottiene un sistema di due equazioni parametriche della stessa retta. Ad esempio, data l'equazione cartesiana

$$2x + 3y + 1 = 0$$

-risolvo l'equazione ricavando $x = -(3/2)y - 1/2$ in funzione di y, e notando che y può assumere qualunque valore in $\mathbb{R}$;
-pongo y uguale ad un parametro t e scrivo la soluzione generale dell'equazione come

$$\begin{cases} x = -(3/2)t - 1/2 \\ y = t \end{cases}$$

Osservazione. Sull'equazione cartesiana si legge che la retta è ortogonale al vettore $(2, 3)$; sull'equazione parametrica si legge che la retta è parallela al vettore $(-3/2, 1)$; questi vettori sono effettivamente ortogonali in quanto $(2, 3) \cdot (-3/2, 1) = -3 + 3 = 0$.

Per rette nello spazio, passaggio da equazioni parametriche ad equazioni cartesiane. Dato un sistema di tre equazioni parametriche di una retta, ricavando il parametro da una (opportuna) equazione e sostituendo nelle altre due si ottiene un sistema di due equazioni cartesiane della stessa retta. Ad esempio, dato il sistema di tre equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + 3t \\ z = 1 + 4t \end{cases}$$

-dalla prima equazione ricavo il parametro t in funzione dell'incognita x $t = (x-1)/2$
-sostituisco nella altre due equazioni, porto tutto ai primi membri ed ottengo

$$\begin{cases} -3x + 2y + 5 = 0 \\ -2x + z + 1 = 0 \end{cases}$$

Osservazione: sull'equazione parametrica si legge che la retta è parallela al vettore $(2,3,4)$; sull'equazione cartesiana si legge che la retta è ortogonale ai vettori $(-3,2,0)$ e $(-2,0,1)$; questi vettori sono effettivamente ortogonali in quanto $(2,3,4)\cdot(-3,2,0) = -6+6+0 = 0$ e $(2,3,4)\cdot(-2,0,1) = -4+0+4 = 0$. Sull'equazione parametrica si legge che la retta passa per il punto $(1,-1,1)$; questo punto verifica effettivamente il sistema di equazioni cartesiane in quanto $-3-2+5=0$ e $-2+2+1=0$.

Per rette nello spazio, il passaggio da equazioni cartesiane ad equazioni parametriche non è così diretto.

Per piani nello spazio, passaggio da equazioni cartesiane ad equazioni parametriche. Data un'equazione cartesiana di un piano, ricavando una incognita (opportuna) in funzione delle altre due e ponendo queste due uguali a parametri si ottiene un sistema di tre equazioni parametriche dello stesso piano. Ad esempio, data l'equazione cartesiana

$$x - 2y + 3z - 4 = 0$$

-risolvo l'equazione ricavando $x = 2y - 3z + 4$ in funzione di y e z e notando che y e z possono assumere qualunque valore in $\mathbb{R}$;
-pongo y e z uguale a due parametri s e t e scrivo la soluzione generale dell'equazione come

$$\begin{cases} x = 2s - 3t + 4 \\ y = s \\ z = t \end{cases}$$

Osservazione. Sull'equazione cartesiana si legge che il piano è ortogonale al vettore $(1,-2,3)$; sull'equazione parametrica si legge che il piano è parallelo ai vettori $(2,1,0)$ e $(-3,0,1)$; il primo vettore è effettivamente ortogonale agli altri due in quanto $(1,-2,3)\cdot(2,1,0) = 2-2+0 = 0$ e $(1,-2,3)\cdot(-3,0,1) = -3+0+3 = 0$. Sull'equazione parametrica si legge che il piano passa per il punto $(4,0,0)$; questo punto soddisfa effettivamente l'equazione cartesiana.

Per piani nello spazio, il passaggio da equazioni parametriche ad equazioni cartesiane non è così diretto.