Lezione del 17.10. Alcuni argomenti in dettaglio.

Prodotto vettoriale in coordinate. Sia $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ una base ortonormale destrorsa di $\mathcal{V}_O^3$. Il prodotto vettoriale $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ di due vettori linearmente indipendenti $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ è stato definito come il vettore che: ha lunghezza uguale all'area del parallelogramma che chiude la spezzata $\mathbf{a}, \mathbf{b}$, direzione ortogonale al piano dei vettori $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$, e verso tale che la terna $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ sia destrorsa. Il prodotto vettoriale di due vettori linearmente dipendenti è stato defin to uguale al vettore nullo.

Dal fatto che il prodotto vettoriale è compatibile con la somma di vettori e con la moltiplicazione di scalari per vettori, e dal fatto che la tablella dei prodotti vettoriali dei vettori della base è

$$\begin{array}{c|ccc} \times & \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \hline \mathbf{i} & \mathbf{0} & \mathbf{k} & -\mathbf{j} \\ \mathbf{j} & -\mathbf{k} & \mathbf{0} & \mathbf{i} \\ \mathbf{k} & \mathbf{j} & -\mathbf{i} & \mathbf{0} \end{array}$$

segue che

$$(a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}) \times (b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}) = (a_2b_3 - a_3b_2)\mathbf{i} + (a_3b_1 - a_1b_3)\mathbf{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{k}$$

Identificando i vettori con le colonne delle loro coordinate, si ha dunque

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{bmatrix}$$

Esempio,

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot 7 - 4 \cdot 6 \\ 4 \cdot 5 - 2 \cdot 7 \\ 2 \cdot 6 - 3 \cdot 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Si noti che il vettore prodotto è effettivamente ortogonale ai due vettori fattori.

Aplicazione. Sia π il piano che ha equazione parametrica

$$\mathrm{OP} = \mathrm{OP}_0 + s\mathbf{u} + t\mathbf{v}$$

π passa per il punto P_0 ed è parallelo ai vettori linearmente indipendenti $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ (suoi vettori giacitura); il vettore $\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$ è ortogonale ai vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ e dunque ai vettori che stanno sul piano π (è un vettore normale di π). Dunque π ha equazione cartesiana

$$(\mathrm{OP} - \mathrm{OP}_0) \cdot \mathbf{w} = 0.$$

Esempio. Il piano di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 1 + s + t \\ y = 2 + s + 2t \\ z = 3 + s + 4t \end{cases}$$

passa per il punto $(1, 2, 3)$ ed ha vettori giacitura $(1, -1, 1)$ e $(2, 4, 8)$, dunque ha un vettore normale

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ed ha equazione cartesiana

$$2(x-1)-3(y-2)+z-3=0.$$

Applicazione. La retta che ha sistema di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} 2x+3y+5z-1=0 \\ 3x+5y+7z-2=0 \end{cases}$$

è intersezione di due piani che hanno vettori normali $(2,3,5)$ e $(3,-5,7)$ (non proporzionali). Un vettore è vettore direttore della retta se e solo se è ortogonale ai vettori $(2,3,5)$ e $(3,-5,7)$. Un tale vettore è dato da

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Dunque la retta ha un'equazione parametrica del tipo

$$\begin{cases} x = x_0 - 4t \\ y = y_0 + t \\ z = z_0 + t \end{cases}$$

Posizioni reciproche di piani. Nello spazio euclideo $\mathcal{E}^3$; fissato un sistema di riferimento cartesiano ortogonale monometrico. Consideriamo due piani. Si hanno i seguenti casi: i due piani sono distinti ed hanno qualche punto in comune; allora si intersecano secondo una retta; i due piani non hanno alcun punto in comune; i due piani coincidono. Nel primo caso i piani si dicono incidenti, negli altri due si dicono paralleli.

Consideriamo due piani con equazioni cartesiane

$$\begin{aligned} a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0, &\quad \text{con } (a_1,b_1,c_1)\neq(0,0,0) \\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0, &\quad \text{con } (a_2,b_2,c_2)\neq(0,0,0). \end{aligned}$$

Se i vettori normali (a_1,b_1,c_1) e (a_2,b_2,c_2) sono l'uno multiplo scalare dell'altro, allora i due piani sono paralleli, e sono coincidenti o paralleli in senso stretto secondo che i vettori (a_1,b_1,c_1,d_1) e (a_2,b_2,c_2,d_2) siano o meno l'uno multipo scalare dell'altro. Se i vettori normali (a_1,b_1,c_1) e (a_2,b_2,c_2) non sono l'uno multiplo scalare dell'altro, allora i due piani sono incidenti; la retta loro intersezione ha sistema di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0 \end{cases}$$

ed ha un vettore direttore dato dal prodotto vettoriale $(a_1,b_1,c_1)\times(a_2,b_2,c_2)$.

Posizioni reciproche di rette e piani. Nello spazio euclideo $\mathcal{E}^3$; fissato un sistema di riferimento cartesiano ortogonale monometrico. Consideriamo una retta ed un piano. Si hanno i seguenti casi: la retta ha qualche punto in comune col piano e non è contenuta nel piano; allora la retta ed il piano si intersecano in un punto; la retta ed il piano non hanno alcun punto in comune; la retta è contenuta nel piano. Nel primo caso la retta ed il piano si dicono incidenti, negli altri due si dicono paralleli.

Consideriamo una retta di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = x_0 + \ell t \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases}$$

ed un piano di equazione cartesiana

$$ax + by + cz + d = 0, \quad \text{con } (a, b, c) \neq (0, 0, 0)$$

Se il vettore direttore della retta (ℓ, m, n) è ortogonale al vettore normale del piano (a, b, c), allora la retta è parallela al piano, ed è contenuta o parallela in senso stretto secondo che il punto della retta (x_0, y_0, z_0) stia o meno sul piano. Se il vettore direttore della retta (ℓ, m, n) non è ortogonale al vettore normale del piano (a, b, c), allora la retta ed il piano sono incidenti in un punto.

Esempio. Consideriamo la retta di equazioni parametriche ed il piano di equazione cartesiana

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 + 3t \\ z = 1 + 4t \end{cases} \qquad 5x - 6y + 7z - 8 = 0$$

Il vettore direttore della retta $(2, 3, 4)$ non è ortogonale al vettore normale del piano $(5, -6, 7)$, dunque la retta ed il piano sono incidenti in un punto. Per determinarlo, sostituiamo alle variabili nell'equazione cartesiana le loro espressioni dalle equazioni parametriche ed otteniamo

$$5(1 + 2t) - 6(1 + 3t) + 7(1 + 4t) - 8 = 0, \quad 20t - 2 = 0 \quad t = 1/10;$$

sostituiamo nell'equazioni parametriche e troviamo il punto $(6/5, 13/10, 7/5)$.

Posizioni reciproche di rette. Nello spazio euclideo $\mathcal{E}^3$; fissato un sistema di riferimento cartesiano ortogonale monometrico. Consideriamo due rette. Si hanno i seguenti casi: le rette non sono contenute entrambe in alcun piano; le rette sono contenute entrambe in uno stesso piano. Nel secondo caso si hanno i seguenti sottocasi: le rette sono distinte ed hanno un punto in comune; le rette non hanno alcun punto in comune; le rette coincidono. Nel primo caso le rette si dicono sghembe, nel secondo caso complanari; nel secondo e terzo sottocaso si dicono parallele.

Un modo per determinare le posizioni reciproche di due rette date da equazioni parametriche. Sia r_1 la retta per un punto P_1 con un vettore direttore $\mathbf{v}_1$ e sia r_2 la retta per un punto P_2 con un vettore direttore $\mathbf{v}_2$.
1- Se $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ sono linearmente dipendenti, allora r_1 ed r_2 sono parallele.
2- Supponiamo che $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ siano linearmente indipendenti. Allora il piano π_1 per P_1 avente vettori giacitura $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ e il piano π_2 per P_2 avente vettori giacitura $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ contengono rispettivamente r_1 ed r_2 e sono paralleli.
2'- Se $\pi_1 = \pi_2$ allora r_1 ed r_2 sono complanari e dunque, non esendo parallele, sono incidenti;
2"- Se $\pi_1 \neq \pi_2$ allora r_1 ed r_2 non sono incidenti e dunque, non essendo parallele, sono sghembe.

Esempio. Consideriamo le rette di equazioni parametriche

$$r_1 : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 + t \\ z = 3 + t \end{cases} \qquad r_2 : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -3 + 2t \\ z = 4 + 4t \end{cases}$$

r_1 passa per il punto $(1, -2, 3)$ ed ha un vettore direttore $(1, 1, 1)$; r_2 passa per il punto $(2, -3, 4)$ ed ha un vettore direttore $(1, 2, 4)$.
$(1, 1, 1)$ e $(1, 2, 4)$ non sono proporzionali, dunque r_1 ed r_2 non sono parallele.
Il piano π_1 per $(1, -2, 3)$ avente vettori giacitura $(1, 1, 1)$ e $(1, 2, 4)$ ha un vettore normale

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

dunque ha equazione cartesiana

$$2(x - 1) - 3(y + 2) + z - 3 = 0$$

Il piano π_2 per $(2, -3, 4)$ avente vettori giacitura $(1, 1, 1)$ e $(1, 2, 4)$ coincide col piano π_1 se e solo se il punto $(2, -3, 4)$ appartiene a π_1 cioè se e solo se

$$2(2 - 1) - 3(-3 + 2) + 4 - 3 = 0, \quad 6 = 0, \quad \text{falso}.$$

Dunque $\pi_1 \neq \pi_2$ ed r_1 e r_2 sono sghembe.

Lunghezze, distanze ed angoli.
In ($\mathcal{V}_O^1$ oppure) $\mathcal{V}_O^2$ oppure $\mathcal{V}_O^3$. Si è visto che la lunghezza di un vettore si può ricavare dal prodotto scalare: per ogni vettore $\mathbf{v}$

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}.$$

Si è detto versore ciascun vettore di lunghezza 1; per ciascun vettore non nullo $\mathbf{v}$ esiste esattamente un versore con la sua stessa direzione e verso, ed è $\mathbf{v}/\|\mathbf{v}\|$.
Si è visto che il coseno dell'angolo fra due vettori si può ricavare dal prodotto scalare: per ogni due vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$

$$\cos \widehat{\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2} = \frac{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2}{\|\mathbf{v}_1\|\|\mathbf{v}_2\|}.$$

In ($\mathcal{E}^1$ oppure) $\mathcal{E}^2$ oppure $\mathcal{E}^3$. La distanza fra due punti si può esprimere nei termini di lunghezze di vettori: per ogni due punti P_1, P_2

$$\mathrm{d}(P_1, P_2) = \|P_1P_2\| = \|\mathrm{OP}_1 - \mathrm{OP}_2\|.$$

Lunghezze, distanze ed angoli nel piano.
Nel piano euclideo $\mathcal{E}^2$, fissato un sistema di riferimento cartesiano ortogonale monometrico. Il prodotto scalare di due vettori $\mathbf{v}_1 = (x_1, y_1)$ e $\mathbf{v}_2 = (x_2, y_2)$ è dato da:

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = x_1y_1 + x_2y_2,$$

dunque la lunghezza di un vettore $\mathbf{v} = (x, y)$ è data da

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

e la distanza fra due punti $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$ è data da

$$\mathrm{d}(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Distanza punto-retta. Dati un punto P_0 ed una retta r, si ha che il punto di r più vicino a P_0 è il punto R_0 proiezione ortogonale di P_0 su r :

$$\begin{aligned} \text{per ogni } R \in r \quad & \mathrm{d}(R, P_0) \geq \mathrm{d}(R_0, P_0), \quad \text{e} \\ & \mathrm{d}(R, P_0) = \mathrm{d}(R_0, P_0) \text{ solo se } R = R_0; \end{aligned}$$

la distanza fra il punto P_0 e la retta r si definisce come la distanza fra il punto P_0 ed i punto R_0 :

$$\mathrm{d}(P_0, r) = \mathrm{d}(P_0, R_0).$$

Esempio. Sia $P_0 = (1, 4)$ ed r la retta di equazione cartesiana $x - 2y + 2 = 0$.
Il punto R_0 proiezione ortogonale di P_0 su r è l'intersezione di r con la retta n per P_0 ortogonale ad r. Osservo che $(1, -2)$ è un vettore ortogonale ad r, dunque è un vettore direttore di n ed n ha un'equazione parametrica

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 4 - 2t \end{cases}$$

Determino l'intersezione R_0 della retta n con la retta r. Sostituisco nell'equazione di r alle incognite le loro espressioni prese dall'equazione parametrica di n ed ottengo

$$1 + t - 2(4 - 2t) + 2 = 0, \quad 5t - 5 = 0, \quad \text{da cui} \quad t = 1.$$

Sostituisco nell'equazione parametrica di n ed ottengo $R_0 = (2, 2)$.
La distanza di P_0 da r è

$$\mathrm{d}(P_0, r) = \mathrm{d}(P_0, R_0) = \sqrt{(1-2)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{5}.$$

Equazioni parametriche normali. Un'equazione parametrica di retta si dice "normale" se il vettore direttore ad essa associato è un versore:

$$\mathrm{OP} = \mathrm{OP}_0 + t\mathbf{v}, \qquad \text{con } \|\mathbf{v}\| = 1.$$

Proposizione. Se due punti sono ottenuti da una tale equazione in corrispondenza di due valori del parametro, allora la distanza fra i due punti è data dal valore assoluto della differenza fra i due valori:

$$\mathrm{OP}_1 = \mathrm{OP}_0 + t_1\mathbf{v} \text{ e } \mathrm{OP}_2 = \mathrm{OP}_0 + t_2\mathbf{v} \quad \text{implica} \quad \mathrm{d}(P_1, P_2) = |t_1 - t_2|.$$

Equazioni cartesiane normali. Un'equazione cartesiana di retta si dice "normale" se il vettore normale ad essa associato è un versore:

$$ax + by + c = 0, \qquad \text{con } \|(a, b)\| = 1.$$

Ciascuna retta ha infinite equazioni cartesiane, ma ha esattamente due equazioni cartesiane normali.

Proposizione. La distanza fra un punto ed una retta si ottiene sostituendo le coordinate del punto al primo membro di un'equazione normale della retta e prendendo il valore assoluto; specificamente, per un punto $P_0 = (x_0, y_0)$ ed una retta r di equazione normale $ax + by + c = 0$ $(a^2 + b^2 = 1)$ si ha

$$\mathrm{d}(P, r) = |ax_0 + by_0 + c|.$$

Esempio (ripresa del precedente). Sia $P_0 = (1, 4)$ ed r la retta di equazione cartesiana $x - 2y + 2 = 0$. Una (una delle due) equazione normale della retta r è

$$\frac{x - 2y + 2}{\sqrt{5}} = 0.$$

Dunque si ottiene (come prima)

$$\mathrm{d}(P_0, r) = \frac{|1 - 2 \cdot 4 + 2|}{\sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}.$$

Fatto. Date due rette parallele r ed s, si ha che tutte le distanze fra un punto di una delle due rette e l'altra retta son uguali. Il valore comune di queste distanze si dice distanza fra le due rette e si indica con $\mathrm{d}(r, s)$.

Lunghezze, distanze ed angoli nello spazio.

Nello spazio euclideo $\mathcal{E}^3$, fissato un sistema di riferimento cartesiano ortogonale monometrico. Il prodotto scalare di due vettori $\mathbf{v}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e $\mathbf{v}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ è dato da

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3,$$

dunque la lunghezza di un vettore $\mathbf{v} = (x, y, z)$ è data da

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

e la distanza fra due punti $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ è data da

$$\mathrm{d}(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_1 - z_2)^2}.$$

Distanza punto-piano. Dati un punto P_0 ed un piano π, si ha che il punto di π più vicino a P_0 è il punto Q_0 proiezione ortogonale di P_0 su π :

$$\begin{aligned} \text{per ogni } Q \in \pi \quad & \mathrm{d}(Q, P_0) \geq \mathrm{d}(Q_0, P_0), \quad \text{e} \\ & \mathrm{d}(Q, P_0) = \mathrm{d}(Q_0, P_0) \text{ solo se } Q = Q_0; \end{aligned}$$

la distanza fra il punto P_0 e il piano π si definisce come la distanza fra il punto P_0 ed i punto Q_0 :

$$\mathrm{d}(P_0, \pi) = \mathrm{d}(P_0, Q_0).$$

Equazioni parametriche normali di rette. Un'equazione parametrica di retta si dice "normale" se il vettore direttore ad essa associato è un versore:

$$\mathrm{OP} = \mathrm{OP}_0 + t\mathbf{v}, \qquad \text{con } \|\mathbf{v}\| = 1.$$

Proposizione. Se due punti sono ottenuti da una tale equazione in corrispondenza di due valori del parametro, allora la distanza fra i due punti è data dal valore assoluto della differenza fra i due valori:

$$\mathrm{OP}_1 = \mathrm{OP}_0 + t_1\mathbf{v} \text{ e } \mathrm{OP}_2 = \mathrm{OP}_0 + t_2\mathbf{v} \quad \text{implica} \quad \mathrm{d}(P_1, P_2) = |t_1 - t_2|.$$

Equazioni cartesiane normali di piani. Un'equazione cartesiana di piano si dice "normale" se il vettore normale ad essa associato è un versore:

$$ax + by + cz + d = 0, \qquad \text{con } \|(a, b, c)\| = 1.$$

Ciascun piano ha infinite equazioni cartesiane, ma ha esattamente due equazioni cartesiane normali.

Proposizione. La distanza fra un punto ed un piano si ottiene sostituendo le coordinate del punto al primo membro di un'equazione normale del piano e prendendo il valore assoluto; specificamente, per un punto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ ed un piano π di equazione normale $ax + by + cz + d = 0$ ($a^2 + b^2 + c^2 = 1$) si ha

$$\mathrm{d}(P, r) = |ax_0 + by_0 + cz + d|.$$

Fatto. Dati due piani paralleli π_1 e π_2, si ha che tutte le distanze fra un punto di uno dei due piani e l'altro piano sono uguali. Il valore comune di queste distanze si dice distanza fra i due piani e si indica con $\mathrm{d}(\pi_1, \pi_2)$.

Rette sghembe. La posizione reciproca di due rette sghembe è in buona parte descritta dalla distanza fra i due piani paralleli che le contengono e dal coseno dell'angolo fra due versori direttori delle due rette.

Esempio. Si è visto che seguenti rette sono sghembe

$$r_1 : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 + t \\ z = 3 + t \end{cases} \qquad r_2 : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -3 + 2t \\ z = 4 + 4t \end{cases}$$

Dei due piani π_1 e π_2 fra loro paralleli che contengono rispettivamente r_1 ed r_2 si è visto che π_1 ha una equazione cartesiana $2x - 3y + z - 11 = 0$. Dunque la distanza fra i due piani è data da

$$\mathrm{d}(\pi_1, \pi_2) = \mathrm{d}(\pi_1, (2, -3, 4)) = \frac{|2 \cdot 2 - 3 \cdot (-3) + 4 - 11|}{\sqrt{4 + 9 + 1}} = \frac{6}{\sqrt{14}}.$$

I versori direttori della retta r_1 sono $\mathbf{v}_{11} = (1, 1, 1)/\sqrt{3}$ e $\mathbf{v}_{12} = -(1, 1, 1)/\sqrt{3}$.
I versori direttori della retta r_2 sono $\mathbf{v}_{21} = (1, 2, 4)/\sqrt{21}$ e $\mathbf{v}_{22} = -(1, 2, 4)/\sqrt{21}$.
I coseni degli angoli fra questi versori sono

$$\cos \widehat{\mathbf{v}_{11}\mathbf{v}_{21}} = \cos \widehat{\mathbf{v}_{12}\mathbf{v}_{22}} = \frac{1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 4}{\sqrt{3}\sqrt{21}} = \frac{\sqrt{7}}{3}$$

$$\cos \widehat{\mathbf{v}_{11}\mathbf{v}_{22}} = \cos \widehat{\mathbf{v}_{12}\mathbf{v}_{21}} = -\frac{\sqrt{7}}{3}$$